Reduzierte Produkte von Halbordnungen

Eine Verallgemeinerung der Shelahschen pcf-Theorie

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation
von

Dipl.-Math. Stefan Neumann
geboren am 14. 7. 1970 in Minden/Westf.

2000

Referent: Prof. Dr. Karsten Steffens
Korreferent: Prof. Dr. Helmut Pfeiffer
Tag der Promotion: 30. Juni 2000

Zusammenfassung

Die Shelahsche pcf-Theorie behandelt üblicherweise reduzierte Produkte von regulären Kardinalzahlen der Form $\prod \bar{\lambda}/I$ und deren wahre Kofinalitäten. Dabei spielen die strukturellen Resultate über das Ideal $J_{<\lambda}(\bar{\lambda})$ eine besondere Rolle.
In dieser Arbeit wird diese Theorie verallgemeinert auf Produkte von Halbordnungen. Dazu wird zunächst der Begriff der Beschränktheitszahl einer Halbordnung eingeführt. Mit Hilfe dieses Begriffes gelingt die Entwicklung einer Theorie mit analogen strukturellen Resultaten für Produkte der Form $\prod \bar{H}/I$, wobei $\bar{H} = (H_i : i < \kappa)$ eine Familie von Halbordnungen ist, die zur pcf-Theorie analoge strukturelle Eigenschaften besitzt. Insbesondere wird ein analoges Ideal $J_{<\lambda}(\bar{H})$ definiert und es wird die Existenz von Generatoren bewiesen. Anschließend wird gezeigt, daß im speziellen Fall der Produkte von regulären Kardinalzahlen die Resultate der pcf-Theorie über wahre Kofinalitäten auch in der neuen Theorie enthalten sind.
Den Abschluß der Arbeit bilden einige Resultate über Shelahs Kardinalzahlfunktion $\mathrm{pp}(\lambda)$, die u. a. zeigen, daß es sich hier um eine nichttriviale Verallgemeinerung der pcf-Theorie handelt.

Schlagworte

Mengenlehre, Kardinalzahlarithmetik, pcf-Theorie

Abstract

Shelah's pcf theory usually deals with reduced products of regular cardinals of the form $\prod \bar{\lambda}/I$ and their true cofinalities. Results about the ideal $J_{<\lambda}(\bar{\lambda})$ play an important role in this theory.

In this work, pcf theory is generalized to products of partial orders. To do this, the notion of the bounding number of a partial order is introduced. Using this notion, we can develop a new theory with similar results about products $\prod \bar{H}/I$, where $\bar{H} = (H_i : i < \kappa)$ is a sequence of partial orders. In particular an ideal $J_{<\lambda}(\bar{H})$ is defined and the existence of generators is proved for this ideal. In the special case of products of regular cardinals, it is shown that the results from pcf theory about true cofinalities are included in this new theory.

At the end of the work, we give some results about Shelah's cardinal function $\mathrm{pp}(\lambda)$. These results also illustrate that the generalization was nontrivial.

Keywords

set theory, cardinal arithmetic, pcf theory

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Kardinalzahlarithmetik ist auch heute noch ein zentrales Gebiet der Mengenlehre, das immer wieder die Entwicklung neuer Methoden, die auch anderweitig Verwendung finden, motiviert. So hinterließen auch die Resultate von K. Gödel, P. J. Cohen und W. B. Easton über die Cantorsche Kontinuumshypothese und deren Verallgemeinerung die fruchtbaren Methoden der konstruktiblen Hierarchie und des Forcing.

Im Anschluß an diese Resultate blieb lediglich die Frage nach den möglichen Werten von 2^λ für singuläre Kardinalzahlen λ offen. Eines erstes, hinsichtlich des Eastonschen Ergebnisses überraschendes, Resultat gelang J. Silver: Ist λ eine singuläre Kardinalzahl mit überabzählbarer Kofinalität und gilt $2^\kappa = \kappa^+$ für alle $\kappa < \lambda$, so gilt auch $2^\lambda = \lambda^+$. Ein allgemeineres Resultat wurde wenig später von F. Galvin und A. Hajnal gefunden: Ist z. B. $\aleph_{\omega_1}$ eine starke Limeskardinalzahl, so gilt $2^{\aleph_{\omega_1}} < \aleph_{(2^{\aleph_1})^+}$.

Im Anschluß daran entwickelte S. Shelah aus den Methoden von Galvin und Hajnal seine pcf-Theorie, für die bereits Anwendungen u. a. in den Bereichen Mengenlehre, Modelltheorie und Topologie existieren, und erhielt damit bessere Ergebnisse. Zum einen konnte die Beschränkung auf überabzählbare Kofinalitäten aufgehoben werden, außerdem erhielt er z. B. die substantiellere Schranke $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}$, falls $\aleph_\omega$ eine starke Limeskardinalzahl ist.

Dazu betrachtet Shelah in seiner pcf-Theorie reduzierte Produkte von regulären Kardinalzahlen und deren wahre Kofinalitäten.[1] Um das obige berühmte Resultat zu erhalten, betrachtet er etwa die folgende Menge

$$\mathrm{pcf}(\aleph_n : n < \omega) = \{\mathrm{tcf}(\textstyle\prod_{n<\omega} \aleph_n/I) : I \text{ Ideal auf } \omega\};$$

der Beweis seines Resultats läßt sich dann grob in drei Schritte einteilen. Ist $\aleph_\omega$ eine starke Limeskardinalzahl, so läßt sich zeigen:

(i) $\max \mathrm{pcf}(\aleph_n : n < \omega) = |\prod_{n<\omega} \aleph_n| = 2^{\aleph_\omega}$.

(ii) $\mathrm{pcf}(\aleph_n : n < \omega)$ ist ein Intervall regulärer Kardinalzahlen.

(iii) $|\mathrm{pcf}(\aleph_n : n < \omega)| \leq \aleph_3$.

[1] Die genauen Definitionen findet man im Text dieser Arbeit.

Mit Hilfe von (ii) und (iii) läßt sich dann der Wert von $\max \mathrm{pcf}(\aleph_n : n < \omega)$, also nach (i) auch der Wert von $2^{\aleph_\omega}$, abschätzen.

In dieser Arbeit verallgemeinern wir die wesentlichen Begriffe der Shelahschen pcf-Theorie auf reduzierte Produkte von Halbordnungen. Um dies zu ermöglichen, gehen wir von der von Shelah betrachteten wahren Kofinalität über zu der von uns definierten Beschränktheitszahl $\mathfrak{b}(H)$ einer Halbordnung H. Mit der Betrachtung der entsprechenden Menge

$$\mathrm{p}\mathfrak{b}(\bar{H}) = \{\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) : I \text{ Ideal auf } \mathrm{Db}(\bar{H})\}$$

für eine Familie $\bar{H}$ von Halbordnungen erhalten wir z. B. als entsprechende Ergebnisse, daß auch $\mathrm{p}\mathfrak{b}(\bar{H})$ ein Maximum besitzt sowie die Abschätzung $|\,\mathrm{p}\mathfrak{b}(\bar{H})| \leq 2^{|\,\mathrm{Db}(\bar{H})|}$, die sozusagen der Vorgänger der Abschätzung (iii) ist und in Zusammenhang mit den Resultaten von Galvin und Hajnal steht.

Ferner können wir der pcf-Theorie entsprechende Ideale $J_{<\lambda}(\bar{H})$ definieren. Das Hauptresultat dieser Arbeit ist der Beweis der Existenz von Generatoren für diese Ideale, eine dem sogenannten pcf-Theorem, welches in dem oben skizzierten Beweis eine wichtige Rolle spielt, entsprechende Aussage für die von uns entwickelte Theorie.

Der Übergang zu Beschränktheitszahlen hat neben der dadurch ermöglichten Verallgemeinerung der Theorie noch weitere Vorteile für die Entwicklung der Theorie. Da die Beschränktheitszahl im Gegensatz zur wahren Kofinalität für jede Halbordnung definiert ist, können wir bei einer gegebenen Familie $\bar{H}$ von Halbordnungen die Abbildung $I \mapsto \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$ betrachten. Dies ermöglicht eine „axiomatischen Zugang“ zu Definition und grundlegenden Eigenschaften des Ideals $J_{<\lambda}(\bar{H})$ und somit einen transparenteren Aufbau der Theorie durch die klarere Trennung von kombinatorischen und idealtheoretischen Argumenten. Außerdem kann bei der gesamten Entwicklung der Theorie auf die Verwendung von Ultrafiltern, welche ein wesentlicher, aber unkonstruktiver, Bestandteil der üblichen Entwicklung der pcf-Theorie sind, verzichtet werden.

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen gegliedert: Im ersten Kapitel führen wir die grundlegenden Definitionen durch und geben einige einfache Eigenschaften der definierten Begriffe an. Im zweiten Kapitel wird das Ideal $J_{<\lambda}(\bar{H})$ eingeführt und es werden die wesentlichen Eigenschaften dieses Ideals bewiesen. Die beiden folgenden Kapitel dienen dem Beweis der Existenz von

Generatoren. Dazu wird im dritten Kapitel mit Hilfe des Modells $H(\Theta)$ ein kombinatorisches Hilfsmittel zur Verfügung gestellt, das im vierten Kapitel für den Existenzbeweis der Generatoren verwendet wird. Ferner wird auf ein zur Existenz von Generatoren unmittelbar äquivalentes Prinzip hingewiesen. Schließlich wird im fünften Kapitel mit Hilfe der vorher entwickelten Methoden nachgewiesen, daß die in dieser Arbeit entwickelte Theorie der Beschränktheitszahlen reduzierter Produkte von Halbordnungen tatsächlich die Resultate der pcf-Theorie über wahre Kofinalitäten beinhaltet. Den Abschluß der Arbeit bilden einige Bemerkungen über den Zusammenhang der Theorie mit der von Shelah definierten Kardinalzahlfunktion $\mathrm{pp}(\lambda)$.

An dieser Stelle danke ich Herrn Prof. Dr. Karsten Steffens für die Betreuung während des Entstehens dieser Arbeit. In zahlreichen Gesprächen trug er durch seine konstruktiven Fragen, Anmerkungen und Hinweise zur Gestaltung dieser Arbeit bei. Den Kollegen Dr. Michael Holz und Markus Michelbrink danke ich stellvertretend für die gute Zusammenarbeit während meiner Assistentenzeit in Hannover und für die hilfreichen und aufmunternden Ratschläge. Besonderer Dank gebührt meiner Freundin und meiner Familie für ihr Verständnis, ihre Geduld und Unterstützung während der für sie entbehrungsreichen Zeit.

Schreibweisen

Im allgemeinen benutzen wir in dieser Arbeit die üblichen Standardschreibweisen und -bezeichnungen, wie sie z. B. in [4] oder in [6] verwendet werden. Im folgenden gehen wir auf einige evtl. abweichende Bezeichnungen ein.

Mit $\mathcal{P}(x)$ bezeichnen wir die Potenzmenge einer Menge x. Definitions- und Wertebereich einer Relation R wird mit $\mathrm{Db}(R)$ bzw. mit $\mathrm{Wb}(R)$ bezeichnet.

ON steht für die Klasse der Ordinalzahlen, mit CN wird die Klasse der unendlichen Kardinalzahlen bezeichnet. Kleine griechische Buchstaben verwenden wir ausschließlich für Ordinalzahlen, κ, λ, μ sind für Kardinalzahlen reserviert. Ferner bezeichnet Lim die Klasse der Limesordinalzahlen und Succ die Klasse der Nachfolgerordinalzahlen. Auf vielfachen Wunsch gilt $0 \notin \mathrm{Lim}$. Weiterhin steht Reg für die Klasse der regulären und Sing für die Klasse der singulären Kardinalzahlen.

Ist $C \subseteq \mathrm{ON}$ eine Menge, so ist $\mathrm{otp}(C)$ der Ordnungstyp von C, also diejenige eindeutig bestimmte Ordinalzahl, zu der C ordnungsisomorph ist. Eine Limeszahl δ ist ein Häufungspunkt von C, falls $\delta = \sup(C \cap \delta)$ gilt. Die Menge der Häufungspunkte von C bezeichnen wir mit $\mathrm{acc}(C)$. Ist δ Limeszahl und $C \subseteq \delta$, so heißt C ein Club in δ, falls C unbeschränkt in δ ist und jeder Häufungspunkt $\gamma < \delta$ von C ein Element von C ist. $S \subseteq \delta$ ist stationär in δ, falls für jeden Club C in δ gilt $S \cap C \neq \emptyset$. Sind $\kappa < \lambda$ reguläre Kardinalzahlen, so ist $S^\lambda_\kappa := \{\alpha < \lambda : \mathrm{cf}(\alpha) = \kappa\}$ eine Menge, die stationär in λ ist.

Mit $\square$ kennzeichnen wir das Ende eines Beweises.

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel geben wir zunächst die grundlegenden Definitionen an, um für eine beliebige Halbordnung H die Größen $\mathfrak{b}(H)$, $\mathrm{cf}(H)$ und $\mathrm{tcf}(H)$ zu definieren und einige elementare Eigenschaften herzuleiten. Anschließend führen wir (reduzierte) Produkte von Halbordnungen ein und beginnen mit einer eingehenden Untersuchung der sogenannten Beschränktheitszahlen solcher Produkte.

1.1 $\mathfrak{b}(H)$ und einfache Eigenschaften

Wir beginnen mit einigen grundlegenden Definitionen.

Definition 1.1 Eine **Halbordnung** ist ein Paar $(H, <)$, wobei H eine nichtleere Menge und $<$ eine irreflexive und transitive Relation auf H ist. Sind $a, b \in H$, so schreiben wir $a \leq b$ für $a < b \vee a = b$. Geht aus dem Zusammenhang hervor, welche Relation $<$ auf H gemeint ist, so schreiben wir wie üblich nur H anstelle von $(H, <)$.

Ist $X \subseteq H$, so heißt ein Element $a \in H$ eine **obere Schranke** von X, falls für alle $x \in X$ gilt $x < a$.[1] Eine **Teilmenge** $X \subseteq H$ heißt **unbeschränkt** in

[1] Der Grund, warum wir nicht $x \leq a$ fordern, ist der, daß es so „besser paßt", wie schon das folgende erste Lemma zeigt. Im übrigen interessieren wir uns später nur für Halbordnungen, die keine maximalen Elemente besitzen, d. h. zu jedem $a \in H$ existiert ein $b \in H$ mit $a < b$. Dann hängt die Existenz einer oberen Schranke nicht von der gegebenen Definition ab.

H, falls kein $a \in H$ eine obere Schranke von X ist. X heißt **kofinal** in H, falls für alle $a \in H$ ein $x \in X$ existiert mit $a \leq x$.[2] X ist eine **Skala** in H, falls X kofinal in H ist und durch $<$ linear geordnet wird.

Eine **Folge** $(x_\alpha : \alpha < \lambda)$ von Elementen von H nennen wir **unbeschränkt** (**kofinal**), falls ihr Wertebereich, also die Menge $\{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$ unbeschränkt (kofinal) in H ist. Die Folge heißt **wachsend**, falls für alle $\alpha < \beta < \lambda$ gilt $x_\alpha < x_\beta$. (Der Deutlichkeit halber werden wir anstelle des Begriffs wachsend meistens die Begriffe $<$-wachsend, $\leq$-wachsend usw. verwenden.)

Bevor wir die entsprechenden Größen definieren, notieren wir noch einige Zusammenhänge für die eben definierten Begriffe.

Lemma 1.2 *Es sei H eine Halbordnung.*

(i) H selbst ist kofinal in H.

(ii) Ist $X \subseteq H$ kofinal in H, so ist X auch unbeschränkt in H.

Beweis: (i) ist trivial. (ii) zeigen wir indirekt. Angenommen, es gibt ein $a \in H$, das eine obere Schranke von X ist. Da X kofinal in H ist, existiert ein $y \in X$ mit $a \leq y$. Nach Wahl von a gilt jedoch auch $y < a$, also insgesamt $y < y$, ein Widerspruch. □

Insbesondere besitzt also jede Halbordnung eine kofinale und erst recht eine unbeschränkte Teilmenge. Damit ist die Existenz von Beschränktheitszahl und Kofinalität einer Halbordnung, die wir im folgenden definieren, gesichert.

Definition 1.3 Es sei H eine Halbordnung. Die **Beschränktheitszahl** von H ($\mathfrak{b}(H)$) und die **Kofinalität** von H ($\mathrm{cf}(H)$) werden definiert durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(H) &:= \min\{|X| : X \subseteq H \text{ unbeschränkt in } H\}, \\ \mathrm{cf}(H) &:= \min\{|X| : X \subseteq H \text{ kofinal in } H\}. \end{aligned}$$

Existiert eine Skala in H, so sagen wir, H besitzt die **wahre Kofinalität** $\mathrm{tcf}(H)$, die definiert ist durch

$$\mathrm{tcf}(H) := \min\{|X| : X \text{ Skala in } H\}.$$

[2] Hier gilt dieselbe Bemerkung wie eben, d. h. bei den von uns i. a. betrachteten Halbordnungen ohne maximale Elemente hätten wir auch $a < x$ fordern können.

Wir beginnen mit einer wichtigen Eigenschaft der wahren Kofinalität einer Halbordnung H, falls diese existiert. Dies ist dann nämlich die eindeutig bestimmte reguläre Länge einer $<$-wachsenden und in H kofinalen Folge.

Lemma 1.4 *Die Halbordnung H besitze eine Skala. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{tcf}(H) = \lambda$,

(ii) *λ ist regulär und es gibt eine $<$-wachsende Folge $(x_\alpha : \alpha < \lambda)$, die kofinal in H ist.*

Beweis: „(ii) $\Rightarrow$ (i)" Es sei λ regulär und $(x_\alpha : \alpha < \lambda)$ eine $<$-wachsende und kofinale Folge in H. Dann ist $\{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$ eine Skala in H, also gilt sicher $\mathrm{tcf}(H) \leq \lambda$. Angenommen, es ist $\mathrm{tcf}(H) < \lambda$, d. h. es gibt eine Skala Y in H mit $|Y| < \lambda$. Nach Lemma 1.2 ist Y auch unbeschränkt in H. Zu jedem $y \in Y$ können wir jedoch ein $\alpha(y) < \lambda$ mit $y \leq x_{\alpha(y)}$ wählen. Setzen wir $\alpha := \sup\{\alpha(y) : y \in Y\} + 1$, so gilt für alle $y \in Y$ also $y \leq x_{\alpha(y)} < x_\alpha$, d. h. x_α ist eine obere Schranke von Y, ein Widerspruch.

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" Es sei $X \subseteq H$ eine Skala mit $|X| = \mathrm{tcf}(H)$. Mit Hilfe des Zornschen Lemmas können wir eine (bzgl. $\subseteq$) maximale $<$-wachsende Folge von Elementen von X wählen. Dies sei etwa $(x_\alpha : \alpha < \delta)$. Wir zeigen, daß diese Folge kofinal in H ist. Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann existiert ein $y \in H$ mit $y \not\leq x_\alpha$ für alle $\alpha < \delta$. Da X kofinal in H ist, existiert ein $x \in X$ mit $y \leq x$. Da X linear geordnet ist, gilt für alle $\alpha < \delta$ die Eigenschaft $x_\alpha < x \vee x \leq x_\alpha$, also folgt nach Wahl von y, daß $x_\alpha < x$ für alle $\alpha < \delta$ gilt. Setzen wir also $x_\delta := x$, so widerspricht dies der Wahl der Folge $(x_\alpha : \alpha < \delta)$.

Da die Folge $(x_\alpha : \alpha < \delta)$ eine Injektion von δ in X ist, gilt $\delta < |X|^+$. Also ist $\lambda := \mathrm{cf}(\delta) \leq |X|$. Wäre $\lambda < |X|$, so würde dies der Definition von $\mathrm{tcf}(H)$ und der Wahl von X widersprechen, denn ist $(\delta_i : i < \lambda)$ eine in δ unbeschränkte Folge, so ist auch $(x_{\delta_i} : i < \lambda)$ eine in H kofinale Folge. $\square$

Bevor wir uns dem genaueren Studium der Zahl $\mathfrak{b}(H)$ zuwenden, geben wir einen kurzen Vergleich zwischen den drei oben definierten Größen.

Lemma 1.5 *Es sei H eine Halbordnung. Dann gilt:*

(i) $1 \leq \mathfrak{b}(H) \leq \mathrm{cf}(H) \leq |H|$.

(ii) Besitzt H *eine wahre Kofinalität, so gilt* $\mathfrak{b}(H) = \mathrm{cf}(H) = \mathrm{tcf}(H)$.

Beweis: (i) Sicher gilt $1 \leq \mathfrak{b}(H)$, da die leere Menge beschränkt in H ist. Die anderen beiden Ungleichungen folgen aus Lemma 1.2.

(ii) Offensichtlich gilt neben $\mathfrak{b}(H) \leq \mathrm{cf}(H)$ auch $\mathrm{cf}(H) \leq \mathrm{tcf}(H)$, denn jede Skala in H ist insbesondere kofinal in H. Es reicht also, wenn wir außerdem noch $\mathrm{tcf}(H) \leq \mathfrak{b}(H)$ zu zeigen. Angenommen, es ist $\mathfrak{b}(H) < \lambda := \mathrm{tcf}(H)$. Nach Lemma 1.4 existiert eine $<$-wachsende Folge $(x_\alpha : \alpha < \lambda)$, die kofinal in H ist. Ferner existiert aufgrund unserer Annahme eine unbeschränkte Menge $Y \subseteq H$ mit $|Y| = \mathfrak{b}(H) < \lambda$.

Zu jedem $y \in Y$ existiert dann ein $\alpha(y) < \lambda$ mit $y \leq x_{\alpha(y)}$. Setzen wir nun $\alpha := \sup\{\alpha(y) : y \in Y\} + 1 < \lambda$, so ist das Element x_α eine obere Schranke von Y, ein Widerspruch. $\square$

Im folgenden werden wir uns zunächst ausschließlich mit der Größe $\mathfrak{b}(H)$ beschäftigen. In Kapitel 5 werden wir noch einmal zum Verhältnis zwischen den verschiedenen Größen zurückkehren. Die Beschränktheitszahl $\mathfrak{b}(H)$ einer Halbordnung H ist eng verbunden mit dem folgenden Begriff.

Definition 1.6 Eine Halbordnung H heißt **λ-gerichtet**, falls jede Menge $X \subseteq H$ mit $|X| < \lambda$ eine obere Schranke in H besitzt.

Der Zusammenhang dieser Begriffe ist ebenso simpel wie wichtig.

Lemma 1.7 *Sei* H *eine Halbordnung. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathfrak{b}(H) \geq \lambda$.

(ii) H *ist* λ*-gerichtet.*

Insbesondere ist eine Halbordnung H *also stets* $\mathfrak{b}(H)$*-gerichtet, aber nicht* $\mathfrak{b}(H)^+$*-gerichtet, d. h. es gilt*

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(H) &= \min\{\lambda \in \mathrm{CN} : H \textit{ ist nicht } \lambda^+\textit{-gerichtet}\} \\ &= \max\{\lambda \in \mathrm{CN} : H \textit{ ist } \lambda\textit{-gerichtet}\}. \end{aligned}$$

Beweis: „(i) $\Rightarrow$ (ii)“ Ist $X \subseteq H$ mit $|X| < \lambda = \mathfrak{b}(H)$, so ist X nach Definition von $\mathfrak{b}(H)$ nicht unbeschränkt, besitzt also eine obere Schranke in H.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)“ Sei H eine λ-gerichtete Halbordnung. Wäre $\mathfrak{b}(H) < \lambda$, so würde eine unbeschränkte Menge $X \subseteq H$ mit $|X| = \mathfrak{b}(H) < \lambda$ existieren. Dies widerspricht jedoch der Definition einer λ-gerichteten Halbordnung. □

Als nächstes untersuchen wir, welche Werte $\mathfrak{b}(H)$ annehmen kann. Wir werden sehen, daß $\mathfrak{b}(H)$ entweder endlich – dann kommen nur die Werte 1 oder 2 in Frage – oder eine reguläre Kardinalzahl ist.

Lemma 1.8 *Es sei H eine Halbordnung.*

(i) $\mathfrak{b}(H) = 1$ *gdw. H besitzt ein maximales Element.*

(ii) Es gibt eine Halbordnung mit $\mathfrak{b}(H) = 2$.

(iii) Ist $\mathfrak{b}(H) \geq 3$*, so ist* $\mathfrak{b}(H)$ *unendlich.*

Beweis: (i) Ist $\mathfrak{b}(H) = 1$, so existiert ein $a \in H$, so daß $\{a\}$ keine obere Schranke besitzt. Dann ist a ein maximales Element von H. Umgekehrt ist auch für jedes maximale Element $a \in H$ die Menge $\{a\}$ unbeschränkt in H.

(ii) Betrachte $H := 2 \times \omega$ mit

$$(i, m) < (j, n) \;:\Leftrightarrow\; i = j \wedge m < n.$$

Ist $(i, n) \in H$, so gilt $(i, n) < (i, n + 1)$, also besitzt H keine maximalen Elemente, d. h. es ist $\mathfrak{b}(H) \geq 2$. Andererseits besitzt $\{(0, 0), (1, 0)\}$ keine obere Schranke.

(iii) Wegen $\mathfrak{b}(H) \geq 3$ existiert für alle $a, b \in H$ ein $c \in H$ mit $a < c$ und $b < c$. Durch vollständige Induktion erhält man, daß H auch ω-gerichtet ist, d. h. daß jede endliche Teilmenge von H eine obere Schranke besitzt. □

Zusätzlich zur Regularität von $\mathfrak{b}(H)$ im unendlichen Fall zeigen wir nun noch die Existenz eines Objektes, das sich später oft als nützlich erweisen wird.

Lemma 1.9 *Sei H eine Halbordnung und* $\mathfrak{b}(H)$ *unendlich. Dann ist* $\mathfrak{b}(H)$ *regulär und es gibt eine $<$-wachsende Folge* $(y_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}(H))$*, die in H unbeschränkt ist.*

Beweis: Es sei $X \subseteq H$ eine in H unbeschränkte Teilmenge von H mit $|X| = \mathfrak{b}(H)$. Sei etwa $X = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}(H)\}$. Wir definieren rekursiv die gesuchte Folge $(y_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}(H))$. Für $\alpha < \lambda$ ist $\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\}$ eine Teilmenge von H, die eine Mächtigkeit kleiner als $\mathfrak{b}(H)$ besitzt. Da H eine $\mathfrak{b}(H)$-gerichtete Halbordnung ist, können wir eine obere Schranke y_α wählen.

Damit ist die Folge nach Konstruktion $<$-wachsend. Ferner ist sie unbeschränkt, denn andernfalls wäre auch X beschränkt.

Nun ergibt sich auch leicht die Regularität von $\mathfrak{b}(H)$. Wäre $\mu := \mathrm{cf}(\mathfrak{b}(H))$ kleiner als $\mathfrak{b}(H)$, so wäre mit einer in $\mathfrak{b}(H)$ kofinalen Folge $(\delta(\alpha) : \alpha < \mu)$ auch die Menge $\{y_{\delta(\alpha)} : \alpha < \mu\}$ in H unbeschränkt. Dies widerspricht der Definition von $\mathfrak{b}(H)$. $\square$

Bemerkung 1.10 Umgekehrt folgt aus der Existenz einer $<$-wachsenden Folge $(y_\alpha : \alpha < \lambda)$, die unbeschränkt in H ist, jedoch i. a. nur $\mathfrak{b}(H) \leq \lambda$, d. h. eine Lemma 1.4 entsprechende Aussage für Beschränktheitszahlen anstelle von wahren Kofinalitäten gilt nicht.

Betrachten wir z. B. $H := \aleph_0 \times \aleph_1$ mit

$$(m, \alpha) < (n, \beta) \ :\Leftrightarrow \ m \leq n \wedge \alpha \leq \beta \wedge (m, \alpha) \neq (n, \beta),$$

so sind die beiden Folgen $((n, 0) : n < \aleph_0)$ und $((0, \alpha) : \alpha < \aleph_1)$ in H unbeschränkte Folgen verschiedener regulärer Länge.

In jedem Falle ist also $\mathfrak{b}(H)$ die kleinste (reguläre) Kardinalzahl λ, zu der eine $<$-wachsende Folge $(y_\alpha : \alpha < \lambda)$ existiert, die unbeschränkt in H ist.

1.2 Reduzierte Produkte

In diesem Abschnitt definieren wir Produkte und reduzierte Produkte von Halbordnungen. Dies sind in kanonischer Weise wieder Halbordnungen und wir werden die Beschränktheitszahlen dieser Produkte untersuchen.

Definition 1.11 Es sei $\bar{H} = ((H_a, <_a) : a \in A)$ eine Familie von Halbordnungen. Für $f, g \in \prod_{a \in A} H_a$ wird durch

$$f < g \ :\Leftrightarrow \ \forall a \in A \ f(a) <_a g(a)$$

wieder eine Halbordnung definiert. Wir nennen $(\prod_{a\in A} H_a, <)$ das **Produkt** der Halbordnungen $(H_a : a \in A)$.

Im folgenden meinen wir mit einer Familie $\bar{H}$ von Halbordnungen stets eine Familie der Form $((H_a, <_a) : a \in A)$, falls nichts anderes gesagt wird. Außerdem werden wir auch einfach H_a anstelle von $(H_a, <_a)$ schreiben. Das Produkt einer solchen Familie bezeichnen wir mit $(\prod \bar{H}, <)$ oder einfach nur mit $\prod \bar{H}$. Die Beschränktheitszahl dieses Produktes läßt sich sehr einfach aus den Beschränktheitszahlen der einzelnen Faktoren berechnen, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 1.12 *Sei $\bar{H}$ eine Familie von Halbordnungen. Dann ist*

$$\mathfrak{b}(\prod \bar{H}, <) = \min\{\mathfrak{b}(H_a, <_a) : a \in A\}.$$

Insbesondere gilt also: Ist H_a für alle $a \in A$ eine λ-gerichtete Halbordnung, so ist auch $(\prod \bar{H}, <)$ eine λ-gerichtete Halbordnung.

Beweis: Ist $F \subseteq \prod \bar{H}$ mit $|F| < \min\{\mathfrak{b}(H_a) : a \in A\}$, so läßt sich zu jedem $a \in A$ bzgl. $<_a$ eine obere Schranke $g(a) \in H_a$ von $\{f(a) : f \in F\}$ wählen. Dann ist $g \in \prod \bar{H}$ eine obere Schranke von F.

Ist umgekehrt für ein festes $a \in A$ die Menge $X \subseteq H_a$ unbeschränkt in H_a, so sei für jedes $x \in X$ eine Funktion $f_x \in \prod \bar{H}$ gewählt mit $f_x(a) = x$. Dann ist $\{f_x : x \in X\}$ unbeschränkt in $\prod \bar{H}$. □

Wir definieren nun reduzierte Produkte von Halbordnungen und werden sehen, daß die Situation dann nicht mehr so einfach ist.

Definition 1.13 Es sei A eine nichtleere Menge. Eine Menge $I \subseteq \mathcal{P}(A)$ ist ein **Ideal** auf A, falls gilt

(i) $\emptyset \in I$,

(ii) $X, Y \in I \Rightarrow X \cup Y \in I$,

(iii) $X \in I, Y \subseteq X \Rightarrow Y \in I$.

Ein Ideal I heißt **echtes Ideal**, falls $A \notin I$ gilt. Ferner definieren wir für ein Ideal I auf A

$$\begin{aligned} I^+ &:= \{X \subseteq A : X \notin I\} \\ I^* &:= \{X \subseteq A : A \setminus X \in I\}. \end{aligned}$$

I^+ ist die Menge der **I-positiven Mengen**, I^* ist der zu I **duale Filter**.

Definition 1.14 Sei nun $((H_a, <_a) : a \in A)$ eine Familie von Halbordnungen und I ein echtes Ideal auf A. Für $f, g \in \prod_{a \in A} H_a$ setzen wir

$$f <_I g \;:\Leftrightarrow\; \{a \in A : f(a) \not<_a g(a)\} \in I.$$

Das Paar $(\prod_{a \in A} H_a, <_I)$ nennen wir das **reduzierte Produkt** der Familie $((H_a, <_a) : a \in A)$ **modulo** I.

Das reduzierte Produkt werden wir häufig mit $(\prod \bar{H}, <_I)$ oder in bequemerer Schreibweise mit $\prod \bar{H}/I$ bezeichnen. In Lemma 1.21 werden wir u. a. zeigen, daß das reduzierte Produkt wieder eine Halbordnung ist. Bevor wir dies tun, geben wir noch einige Definitionen an, die den Umgang mit reduzierten Produkten vereinfachen.

Definition 1.15 Es sei $\bar{H}$ eine Familie von Halbordnungen. Für $f, g \in \prod \bar{H}$ setzen wir

$$\begin{aligned} C(f,g) &:= \{a \in A : f(a) \not<_a g(a)\}, \\ C[f,g] &:= \{a \in A : f(a) \not\leq_a g(a)\}, \\ B(f,g) &:= \{a \in A : f(a) <_a g(a)\}, \\ B[f,g] &:= \{a \in A : f(a) \leq_a g(a)\}. \end{aligned}$$

Damit gilt also offensichtlich $f <_I g \Leftrightarrow C(f,g) \in I$ für alle Funktionen $f, g \in \prod \bar{H}$. Ferner bemerken wir, daß $f < g \Leftrightarrow C(f,g) = \emptyset$ gilt, m. a. W. entspricht das reduzierte Produkt modulo dem trivialen Ideal $\{\emptyset\}$ genau dem Produkt der Halbordnungen $\bar{H}$.

Definition 1.16 Es sei $(\prod \bar{H}, <_I)$ ein reduziertes Produkt von Halbordnungen. Für $f, g \in \prod \bar{H}$ setzen wir weiterhin

$$\begin{aligned} f \leq_I g \;&:\Leftrightarrow\; \{a \in A : f(a) \not\leq_a g(a)\} \in I, \\ f =_I g \;&:\Leftrightarrow\; \{a \in A : f(a) \neq g(a)\} \in I, \\ f \not<_I g \;&:\Leftrightarrow\; \{a \in A : f(a) \not<_a g(a)\} \notin I. \end{aligned}$$

Es gilt also $f \leq_I g \Leftrightarrow C[f,g] \in I$ für Funktionen $f, g \in \prod \bar{H}$. Ferner gilt offensichtlich $f <_I g \Rightarrow f \leq_I g$ sowie $f =_I g \Rightarrow f \leq_I g$. Die Mengen $B(f,g)$ und $B[f,g]$ werden von Bedeutung sein, wenn wir den Spezialfall der reduzierten Produkte von linearen Ordnungen betrachten.

Für das Rechnen mit reduzierten Produkten ist die folgende Definition hilfreich.

Definition 1.17 Es sei I ein Ideal auf einer nichtleeren Menge A und es seien $X, Y \subseteq A$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} X \subseteq_I Y \quad &:\Leftrightarrow \quad X \setminus Y \in I, \\ X =_I Y \quad &:\Leftrightarrow \quad X \subseteq_I Y \wedge Y \subseteq_I X, \\ X \subsetneqq_I Y \quad &:\Leftrightarrow \quad X \subseteq_I Y \wedge \neg X =_I Y. \end{aligned}$$

Bemerkung 1.18 Man sieht leicht ein, daß $=_I$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(A)$ und eine Kongruenzrelation bzgl. der Operationen $\cup$ und $\cap$ ist. Bezeichnet man die Äquivalenzklasse von X mit $[X]$, so werden durch die Definitionen $[X] \sqcup [Y] := [X \cup Y]$ und $[X] \sqcap [Y] := [X \cap Y]$ die Operationen einer Booleschen Algebra auf der Menge $\mathcal{P}(A)/I := \{[X] : X \in \mathcal{P}(A)\}$ definiert. Ferner ist das Komplement von $[X]$ gerade $[A \setminus X]$, $[\emptyset]$ ist das kleinste Element und $[A]$ ist das größte Element dieser Booleschen Algebra. Definiert man noch wie üblich die Relation $\sqsubseteq$ durch $[X] \sqsubseteq [Y] :\Leftrightarrow [X] \sqcup [Y] = [Y]$, so ist $\subseteq_I$ die korrespondierende Relation auf $\mathcal{P}(A)$, d. h. es gilt $[X] \sqsubseteq [Y] \Leftrightarrow X \subseteq_I Y$.

Die obige Bemerkung werden wir zwar nicht direkt verwenden, jedoch werden die Aussagen des folgenden Lemmas aufgrund des dort beschriebenen Sachverhaltes unmittelbar klar.

Lemma 1.19 *Es sei I ein Ideal auf A und es seien $X, Y, Z \subseteq A$. Dann gilt*

(i) $X =_I \emptyset \Leftrightarrow X \subseteq_I \emptyset \Leftrightarrow X \in I$,

(ii) $X =_I A \Leftrightarrow A \setminus X =_I \emptyset \Leftrightarrow A \setminus X \in I$,

(iii) $X \subseteq_I Y, Y \subseteq_I Z \Rightarrow X \subseteq_I Z$,

(iv) $X \subseteq_I Y, Y \in I \Rightarrow X \in I$,

(v) $X \subseteq_I Y, X \notin I \Rightarrow Y \notin I$.

Wir können nun einige einfache Tatsachen über reduzierte Produkte festhalten.

Lemma 1.20 *Sei $\bar{H}$ eine Familie von Halbordnungen, I ein Ideal auf A und $f, g, h \in \prod \bar{H}$ mit $f \leq_I g$. Dann gilt*

(i) $C(f,h) \subseteq_I C(g,h)$,

(ii) $C[f,h] \subseteq_I C[g,h]$,

(iii) $C(h,f) \supseteq_I C(h,g)$,

(iv) $C[h,f] \supseteq_I C[h,g]$,

(v) $B(f,h) \supseteq_I B(g,h)$,

(vi) $B[f,h] \supseteq_I B[g,h]$,

(vii) $B(h,f) \subseteq_I B(h,g)$,

(viii) $B[h,f] \subseteq_I B[h,g]$.

Die Voraussetzungen dieses Lemmas sind natürlich insbesondere erfüllt, wenn $f <_I g$ gilt. Gilt sogar $f =_I g$, so können wir auch $\subseteq_I$ überall durch $=_I$ ersetzen.

Lemma 1.21 *Es sei $(\prod \bar{H}, <_I)$ ein reduziertes Produkt von Halbordnungen und $f, g, h \in \prod \bar{H}$. Dann gilt*

(i) $f \not<_I f$,

(ii) $f <_I g <_I h \Rightarrow f <_I h$,

(iii) $f \leq_I g \leq_I h \;\Rightarrow\; f \leq_I h$,

(iv) $f <_I g \leq_I h \;\Rightarrow\; f <_I h$,

(v) $f \leq_I g <_I h \;\Rightarrow\; f <_I h$.

Insbesondere ist damit $(\prod \bar{H}, <_I)$ eine Halbordnung.

Bemerkung 1.22 Sind $I \subsetneq J$ Ideale auf A, so sind die oben definierten Relationen $<_J$, $\leq_J$, $=_J$ für Funktionen bzw. $\subseteq_J$, $=_J$ für Mengen offensichtlich Erweiterungen der entsprechenden Relationen $<_I$, $\leq_I$, $=_I$ bzw. $\subseteq_I$, $=_I$. Also gilt z. B. $f <_I g \Rightarrow f <_J g$, $X \subseteq_I Y \Rightarrow X \subseteq_J Y$ usw.

Wir definieren noch zwei häufig verwendete Erweiterungen eines Ideals I.

Definition 1.23 Es sei I ein Ideal auf A und $B \subseteq A$. Dann setzen wir

$$\begin{aligned} I[B] &:= \{X \subseteq A : X \setminus B \in I\}, \\ I \restriction B &:= \{X \subseteq A : X \cap B \in I\}. \end{aligned}$$

Lemma 1.24 *Es sei I ein Ideal auf A und $B \subseteq A$. Dann gilt*

(i) $I[B]$ ist das kleinste Ideal oberhalb von I, das B enthält,

(ii) $I \restriction B = I[A \setminus B]$,

(iii) $I[B]$ ist genau dann echt, wenn $A \setminus B \in I^+$,

(iv) $I \restriction B$ ist genau dann echt, wenn $B \in I^+$.

Wir wenden uns nun der Untersuchung der Beschränktheitszahl reduzierter Produkte zu. Zunächst betrachten wir dabei, wie sich die Erweiterung des Ideals I zu einem Oberideal auswirken kann.

Lemma 1.25 *Es seien $I \subseteq J$ Ideale auf A und $\bar{H}$ eine Familie von Halbordnungen. Dann ist $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) \leq \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J)$.*

Beweis: Es reicht zu zeigen: Ist $F \subseteq \prod \bar{H}$ bzgl. $<_J$ unbeschränkt, so auch bzgl. $<_I$. Dies gilt, da für $f, g \in \prod \bar{H}$ offensichtlich aus $f <_I g$ auch $f <_J g$ folgt. □

Das folgende Beispiel zeigt, daß die Beschränktheitszahl in der Tat vergrößert werden kann.

Beispiel 1.26 Es sei $A = \omega$ und für $n < \omega$ sei $H_n = (\aleph_n, <)$ mit der üblichen Ordnung. Beginnen wir mit dem trivialen Ideal $I_0 = \{\emptyset\}$, so gilt $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I_0) = \mathfrak{b}(\prod \bar{H}) = \aleph_0$ nach Lemma 1.12.

Fügen wir nun die Menge $\{0\}$ zum Ideal I_0 hinzu, betrachten also das Ideal $I_1 = I_0[\{0\}] = \{\emptyset, \{0\}\}$, so ist das reduzierte Produkt $\prod \bar{H}/I_1$ isomorph zum Produkt von $(\aleph_n : n \in \omega \setminus 1)$, also erhalten wir $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I_1) = \aleph_1$.

Setzen wir dies für $n < \omega$ fort durch $I_{n+1} = I_n[\{n\}]$, so erhalten wir eine aufsteigende Folge $(I_n : n < \omega)$ von Idealen auf ω; wie oben gilt entsprechend für $n < \omega$ stets $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I_n) = \aleph_n$.

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir noch eine Verallgemeinerung von Lemma 1.12 herleiten. Dazu dient die folgende Definition.

Definition 1.27 Es sei I ein Ideal auf A und $f : A \to \mathrm{ON}$ eine Funktion. Wir setzen

$$\begin{aligned} \liminf_I f &:= \min\{\delta \in \mathrm{ON} : \{a \in A : f(a) \leq \delta\} \notin I\}, \\ \limsup_I f &:= \min\{\delta \in \mathrm{ON} : \{a \in A : f(a) > \delta\} \in I\}. \end{aligned}$$

Stimmen diese beiden Werte überein, so bezeichnen wir diesen Wert auch mit $\lim_I f$.

Wir zeigen im folgenden Lemma Eigenschaften dieser Begriffe, die in gewisser Weise ihre Namen rechtfertigen.

Lemma 1.28 *Es seien I, J Ideale auf A und $f : A \to \mathrm{ON}$.*

(i) Ist $I \subseteq J$, so gilt

$$\liminf_I f \leq \liminf_J f \leq \limsup_J f \leq \limsup_I f.$$

(ii) Für den speziellen Fall $I = \{\emptyset\}$ gilt

$$\begin{aligned} \liminf_I f &= \min\{f(a) : a \in A\}, \\ \limsup_I f &= \sup\{f(a) : a \in A\}. \end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir also stets $\liminf_I f \geq \min\{f(a) : a \in A\}$ und $\limsup_I f \leq \sup\{f(a) : a \in A\}$.

Mit Hilfe der oben definierten Begriffe läßt sich nun das Lemma 1.12 verallgemeinern.

Lemma 1.29 *Ist $\bar{H}$ eine Familie von Halbordnungen und I ein Ideal auf A, so gilt*

$$\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) \geq \liminf_I(\mathfrak{b}(H_a) : a \in A).$$

Beweis: Es sei $\delta := \liminf_I(\mathfrak{b}(H_a) : a \in A)$ und $F \subseteq \prod \bar{H}$ mit $|F| < \delta$. Nach Definition von $\liminf_I$ ist $X := \{a \in A : \mathfrak{b}(H_a) \leq |F|\} \in I$. Für alle $a \in A \backslash X$ ist also $|F| < \mathfrak{b}(H_a)$, d. h. es läßt sich eine obere Schranke $g(a) \in H_a$ für die Menge $\{f(a) : f \in F\}$ finden. Wählt man für $a \in X$ ein beliebiges Element $g(a) \in H_a$, so ist $g \in \prod \bar{H}$ bzgl. $<_I$ eine obere Schranke von F, denn für $f \in F$ gilt stets $C(f, g) \subseteq X \in I$. □

Beispiel 1.30 Für die in Beispiel 1.26 betrachteten reduzierten Produkte $\prod \bar{H}/I_n$ gilt stets die Gleichheit der beiden im letzten Lemma betrachteten Werte, es ist nämlich $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I_n) = \liminf_{I_n}(\mathfrak{b}(H_n) : n < \omega) = \aleph_n$.

Die Fortführung dieses Beispiels liefert ein Beispiel, in dem die Beschränktheitszahl des reduzierten Produktes $\prod \bar{H}/I$ größer als $\liminf_I(\mathfrak{b}(H_a) : a \in A)$ ist. Betrachten wir nämlich die Vereinigung aller oben betrachteten Ideale I_n, $n < \omega$, so erhalten wir gerade das Ideal $I = \{X \subseteq \omega : X \text{ endlich}\}$ der endlichen Teilmengen von ω. Es gilt dann $\lim_I(\mathfrak{b}(H_n) : n < \omega) = \aleph_\omega$. Nach obigem Lemma ist also $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) \geq \aleph_\omega$. Da $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$ stets regulär ist, muß folglich sogar $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) > \aleph_\omega$ gelten.

Zum Abschluß des Kapitels geben wir noch einen Fall an, in dem man die Beschränktheitszahl eines reduzierten Produktes bestimmen kann, nämlich wenn die Beschränktheitszahlen aller Halbordnungen H_a größer als $|A|$ und identisch sind. Dann nimmt auch die Beschränktheitszahl des reduzierten Produktes diesen Wert an. Wir können dies noch leicht verallgemeinern.

Lemma 1.31 *Es sei $\bar{H}$ eine Familie von Halbordnungen und I ein echtes Ideal auf A. Ferner sei $\lambda > |A|$ regulär mit*

$$\{a \in A : \mathfrak{b}(H_a) = \lambda\} =_I A.$$

Dann ist auch $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) = \lambda$.

Beweis: Es sei $B := \{a \in A : \mathfrak{b}(H_a) = \lambda\}$. Nach Voraussetzung ist also $A \setminus B \in I$. Für alle $a \in B$ können wir eine $<_a$-wachsende Folge $(x^a_\alpha : \alpha < \lambda)$ von Elementen von H_a wählen, die unbeschränkt in H_a ist. Für $a \in A \setminus B$ sei $x^a \in H_a$ beliebig gewählt. Wir setzen dann für alle $\alpha < \lambda$

$$f_\alpha(a) := \begin{cases} x^a_\alpha & ; \quad a \in B \\ x^a & ; \quad a \in A \setminus B \end{cases}.$$

Dann ist $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ unbeschränkt in $\prod \bar{H}/I$, denn ist $g \in \prod \bar{H}$, so existiert zu jedem $a \in B$ ein $\alpha(a) < \lambda$ mit $x^a_{\alpha(a)} \not<_a g(a)$, also auch

$$\forall \alpha \in \lambda \setminus \alpha(a)\ x^a_\alpha \not<_a g(a).$$

Setzen wir nun $\alpha^* := \sup\{\alpha(a) : a \in B\} < \lambda$, so gilt $f_{\alpha^*} \not<_I g$, denn es ist $C(f_{\alpha^*}, g) \supseteq B =_I A \notin I$.

Damit haben wir also $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) \leq \lambda$ bewiesen. $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) \geq \lambda$ folgt aus Lemma 1.29, denn es ist $\liminf_I(\mathfrak{b}(H_a) : a \in A) = \lambda$. Dies gilt offensichtlich, da einerseits $\{a \in A : \mathfrak{b}(H_a) \leq \lambda\} \supseteq B \notin I$ gilt und für alle $\delta < \lambda$ andererseits $\{a \in A : \mathfrak{b}(H_a) \leq \delta\} \subseteq A \setminus B \in I$ gilt. $\square$

Kapitel 2

Das Ideal $J_{<\lambda}(\bar{H})$

In der pcf-Theorie spielt das Ideal $J_{<\lambda}(a)$ eine fundamentale Rolle. Wir wollen in diesem Kapitel das Ideal $J_{<\lambda}(\bar{H})$ für Familien von Halbordnungen definieren und entsprechende Eigenschaften nachweisen.

Der in der pcf-Theorie üblichen Einschränkung $|a|^+ < \min(a)$ entspricht in unserer Situation der Begriff einer progressiven Familie von Halbordnungen, den wir im folgenden Abschnitt definieren werden.

Wir werden zwei verschiedene Wege darstellen, um zu dem folgenden grundlegenden Resultat zu gelangen: Existiert ein Ideal I, so daß $\prod \bar{H}/I$ eine λ-gerichtete Halbordnung ist, so ist $J_{<\lambda}(\bar{H})$ das kleinste derartige Ideal.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels gehen wir den direkten Weg: Wir definieren den Begriff des λ-mächtigen Ideals und zeigen, daß ein Ideal I genau dann λ-mächtig ist, wenn $\prod \bar{H}/I$ eine λ-gerichtete Halbordnung ist. Ferner ermöglicht es der Begriff des λ-mächtigen Ideals zu zeigen, daß der Durchschnitt von λ-mächtigen Idealen wieder ein λ-mächtiges Ideal ist. Damit ist es also möglich, $J_{<\lambda}(\bar{H})$ als den Durchschnitt aller λ-mächtigen Ideale zu definieren. (Falls kein λ-mächtiges Ideal existiert, ist es bequem, $J_{<\lambda}(\bar{H}) := \mathcal{P}(A)$ zu setzen.)

In den folgenden Abschnitten dieses Kapitels stellen wir eine zweite Möglichkeit dar, die grundlegenden Eigenschaften des Ideals $J_{<\lambda}(\bar{H})$ zu entwickeln. Unser Zugang wird dabei zunächst axiomatischer Natur sein, d. h. wir zeigen, daß sich die Existenz und viele der wesentlichen Eigenschaften des Ideals $J_{<\lambda}(\bar{H})$ aus zwei Eigenschaften der Abbildung $I \mapsto \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$ ableiten lassen.

Um diese Eigenschaften schließlich nachzuweisen, führen wir im dritten Abschnitt des Kapitels den Begriff des stabilen Ideals ein und verwenden Methoden, die uns auch in späteren Kapiteln noch nützlich sein werden. Insbesondere werden wir in Kapitel 5 für den speziellen Fall der Produkte von regulären Kardinalzahlen die Verbindung zwischen den stabilen Idealen und der Existenz der wahren Kofinalität herstellen.

2.1 λ-mächtige Ideale

Wir definieren zunächst den Begriff des λ-mächtigen Ideals. Die Idee entspricht dem Vorgehen in [2] und in [11].

Definition 2.1 Es sei $\bar{H}$ eine Familie von Halbordnungen. Ein echtes Ideal I heißt **λ-mächtig für** $\bar{H}$, falls zu jedem $B \in I^+$ ein Ideal $J \supseteq I$ mit $B \in J^+$ existiert, so daß $\prod \bar{H}/J$ eine λ-gerichtete Halbordnung ist.

Wie angekündigt, wollen wir zeigen, daß ein Ideal I genau dann λ-mächtig für $\bar{H}$ ist, wenn $\prod \bar{H}/I$ eine λ-gerichtete Halbordnung ist. Eine Richtung ist trivial, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 2.2 *Es sei $\prod \bar{H}/I$ eine λ-gerichtete Halbordnung. Dann ist I ein λ-mächtiges Ideal für $\bar{H}$.*

Beweis: Es sei $B \in I^+$. Wir haben zu zeigen, daß ein Ideal $J \supseteq I$ mit $B \in J^+$ existiert, so daß $\prod \bar{H}/J$ eine λ-gerichtete Halbordnung ist. Offensichtlich können wir $J := I$ wählen. □

Um die umgekehrte Richtung zeigen zu können, müssen wir eine einschränkende Bedingung an die Familie $\bar{H}$ voraussetzen. Diese Bedingung wird nun definiert.

Definition 2.3 Eine Familie $\bar{H}$ von Halbordnungen heißt **progressiv**, falls für alle $a \in A$ die Halbordnung $(H_a, <_a)$ eine $|A|^{++}$-gerichtete Halbordnung ist.

Wir können nun das angestrebte Resultat für progressive Familien von Halbordnungen beweisen. Der Beweis ist eine Variante des entsprechenden Resultates in [1].

Satz 2.4 *Es sei $\bar{H}$ eine progressive Familie von Halbordnungen und I sei ein λ-mächtiges Ideal für $\bar{H}$. Dann ist $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) \geq \lambda$, also ist $\prod \bar{H}/I$ eine λ-gerichtete Halbordnung.*

Beweis: Es sei $\mu := \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$. Da $\bar{H}$ progressiv ist, ist nach Lemma 1.12 die Halbordnung $\prod \bar{H}$ und damit $\prod \bar{H}/I$ ebenfalls $|A|^{++}$-gerichtet, also ist $\mu \geq |A|^{++}$. Nach Lemma 1.9 ist μ regulär und wir können eine $<_I$-wachsende Folge $\bar{f} = (f_\alpha : \alpha < \mu)$ von Elementen von $\prod \bar{H}$ auswählen, die unbeschränkt bzgl. $<_I$ ist.

Wir nehmen nun $\mu < \lambda$ an und führen dies zu einem Widerspruch.

Rekursiv definieren wir eine Folge $(g_\beta : \beta < |A|^+)$, die bzgl. $<$ wächst. Es sei $g_0 \in \prod \bar{H}$ beliebig. Für Limeszahlen $\gamma < |A|^+$ können wir nach Lemma 1.12 eine $<$-obere Schranke g_γ von $\{g_\beta : \beta < \gamma\}$ wählen.

Für den Nachfolgerschritt sei nun g_β gewählt. Da g_β keine obere Schranke von $\bar{f}$ ist, existiert ein $\alpha(\beta) < \mu$ mit $C(f_{\alpha(\beta)}, g_\beta) \in I^+$.

Da I ein λ-mächtiges Ideal ist, existiert ein $J \supseteq I$ mit $C(f_{\alpha(\beta)}, g_\beta) \in J^+$, so daß $(\prod \bar{H}, <_J)$ eine λ-gerichtete Halbordnung ist. Insbesondere existiert nach Annahme eine $<_J$-obere Schranke $g_{\beta+1}$ von $\bar{f}$, die wir o. B. d. A. größer als g_β annehmen können.

Nun gilt für alle $\alpha \in \mu \setminus \alpha(\beta)$

$$C(f_\alpha, g_\beta) \supsetneqq C(f_\alpha, g_{\beta+1}),$$

denn nach Lemma 1.20 gilt zunächst $C(f_\alpha, g_\beta) \supseteq C(f_\alpha, g_{\beta+1})$. Ferner ist $C(f_{\alpha(\beta)}, g_\beta) \in J^+$. Wieder mit Lemma 1.20 folgt $C(f_{\alpha(\beta)}, g_\beta) \subseteq_I C(f_\alpha, g_\beta)$ und damit $C(f_\alpha, g_\beta) \in J^+$. Nach Wahl von $g_{\beta+1}$ ist aber $C(f_\alpha, g_{\beta+1}) \in J$, also sind diese beiden Mengen verschieden.

Sei nun $\alpha^* := \sup\{\alpha(\beta) : \beta < |A|^+\} < \mu$. Dann ist $(C(f_{\alpha^*}, g_\beta) : \beta < |A|^+)$ eine streng monoton fallende Folge von Teilmengen von A, ein offensichtlicher Widerspruch. Also gilt $\mu = \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) \geq \lambda$ und nach Lemma 1.7 ist $\prod \bar{H}/I$ eine λ-gerichtete Halbordnung. $\square$

Zusammen mit dem folgenden Lemma erhalten wir damit die erste Möglichkeit, das Ideal $J_{<\lambda}(\bar{H})$ zu definieren.

Lemma 2.5 *Es sei $\bar{H}$ eine Familie von Halbordnungen. Ist $\Gamma \neq \emptyset$ eine Menge von λ-mächtigen Idealen für $\bar{H}$, so ist auch $\bigcap \Gamma$ ein λ-mächtiges Ideal für $\bar{H}$.*

Beweis: Es sei $B \in (\bigcap \Gamma)^+$. Dies bedeutet gerade $B \notin \bigcap \Gamma$, also existiert ein $I \in \Gamma$ mit $B \notin I$, d.h. $B \in I^+$. Da I nach Voraussetzung ein λ-mächtiges Ideal ist, existiert ein $J \supseteq I$ mit $B \in J^+$, so daß $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) \geq \lambda$ gilt. Es bleibt also nur noch $J \supseteq \bigcap \Gamma$ zu zeigen. Dies folgt aus $I \in \Gamma$, also $J \supseteq I \supseteq \bigcap \Gamma$. $\square$

Es folgt schließlich die Definition des grundlegenden Ideals $J_{<\lambda}(\bar{H})$.

Definition 2.6 Es sei $\bar{H}$ eine progressive Familie von Halbordnungen und λ eine Kardinalzahl. Existiert ein λ-mächtiges Ideal I für $\bar{H}$, so setzen wir

$$J_{<\lambda}(\bar{H}) := \bigcap \{I : I \text{ ist } \lambda\text{-mächtiges Ideal für } \bar{H}\}.$$

Andernfalls definieren wir $J_{<\lambda}(\bar{H}) := \mathcal{P}(A)$.

Als Konsequenz aus den vorangegangenen Resultaten erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 2.7 *Es sei $\bar{H}$ eine progressive Familie von Halbordnungen und I ein echtes Ideal auf A. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) \geq \lambda$.

(ii) $\prod \bar{H}/I$ *ist λ-gerichtet.*

(iii) I *ist λ-mächtig für $\bar{H}$.*

(iv) $J_{<\lambda}(\bar{H}) \subseteq I$.

Insbesondere gilt also: Existiert ein Ideal I, so daß $\prod \bar{H}/I$ eine λ-gerichtete Halbordnung ist, so ist $J_{<\lambda}(\bar{H})$ das kleinste derartige Ideal.

Wir verzichten zunächst darauf, weitere Schlußfolgerungen zu ziehen. Viele Eigenschaften werden wir stattdessen im nächsten Abschnitt in abstrakterer Form herleiten.

2.2 Ein axiomatischer Zugang

In den beiden folgenden Abschnitten werden wir einen alternativen Zugang zu dem Ideal $J_{<\lambda}(\bar{H})$ angeben, wir werden also insbesondere nicht die Resultate des letzten Abschnittes verwenden und definieren zunächst die Grundlage unseres „axiomatischen" Zugangs.

Definition 2.8 Es sei A eine nichtleere Menge. Dann sei

$$\mathrm{Id}(A) := \{I \subseteq \mathcal{P}(A) : I \text{ ist ein echtes Ideal auf } A\}.$$

Eine Abbildung $\tau : \mathrm{Id}(A) \to \mathrm{CN}$ nennen wir eine **Idealabbildung** auf A. Eine Idealabbildung τ heißt **monoton**, falls für alle $I, J \in \mathrm{Id}(A)$ gilt

$$I \subseteq J \;\Rightarrow\; \tau(I) \leq \tau(J).$$

τ heißt **stetig**, falls für alle $\Gamma \subseteq \mathrm{Id}(A)$, $\Gamma \neq \emptyset$ gilt

$$\tau(\bigcap \Gamma) = \min\{\tau(I) : I \in \Gamma\}.$$

In Lemma 1.25 haben wir bereits gezeigt, daß die Abbildung $I \mapsto \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$ eine monotone Idealabbildung ist. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, daß diese Abbildung auch stetig ist, und erhalten damit ein Beispiel für eine solche Idealabbildung. Zunächst wollen wir jedoch zeigen, daß sich allein aus diesen beiden abstrakten Eigenschaften einige wichtige Ergebnisse herleiten lassen, die wir dann auf unsere spezielle Abbildung $I \mapsto \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$ anwenden können.

Lemma 2.9 *Es sei τ eine monotone und stetige Idealabbildung auf einer Menge A. Dann existieren eindeutige (nicht notwendigerweise echte) Ideale J_λ für $\lambda \in \mathrm{CN}$ mit der Eigenschaft*

$$\forall I \in \mathrm{Id}(A)\ (\tau(I) \geq \lambda \Leftrightarrow J_\lambda \subseteq I). \qquad (*)$$

Für diese Ideale gilt ferner:

(i) Ist J_λ echt, so ist $\tau(J_\lambda) \geq \lambda$.

(ii) Ist $\mu < \lambda$, so gilt $J_\mu \subseteq J_\lambda$.

(iii) Es ist $\lambda \in \mathrm{Wb}(\tau)$ *gdw.* $J_\lambda \subsetneqq J_{\lambda^+}$ *gdw.* $\tau(J_\lambda) = \lambda$.

(iv) $|\,\mathrm{Wb}(\tau)| \leq 2^{|A|}$.

Beweis: Sei $\lambda \in \mathrm{CN}$. Existiert ein echtes Ideal I mit $\tau(I) \geq \lambda$, so setzen wir

$$J_\lambda := \bigcap \{I \in \mathrm{Id}(A) : \tau(I) \geq \lambda\},$$

sonst sei $J_\lambda := \mathcal{P}(A)$.

Wir weisen zunächst die Eigenschaft $(*)$ nach: Ist $I \in \mathrm{Id}(A)$ mit $\tau(I) \geq \lambda$, so ist nach Definition $J_\lambda \subseteq I$.

Ist umgekehrt $I \in \mathrm{Id}(A)$ mit $J_\lambda \subseteq I$, so ist auch J_λ ein echtes Ideal. Nach Fallunterscheidung der Definition gilt also $J_\lambda = \bigcap\{I \in \mathrm{Id}(A) : \tau(I) \geq \lambda\}$ und $\{I \in \mathrm{Id}(A) : \tau(I) \geq \lambda\} \neq \emptyset$. Aufgrund der Stetigkeit von τ ist also $\tau(J_\lambda) \geq \lambda$ und mit der Monotonie von τ folgt $\tau(I) \geq \tau(J_\lambda) \geq \lambda$.

Um die Eindeutigkeit der Ideale zu beweisen, seien J'_λ weitere Ideale und es gelte auch

$$\forall I \in \mathrm{Id}(A)\ (\tau(I) \geq \lambda \Leftrightarrow J'_\lambda \subseteq I). \tag{$*$}'$$

Ist J_λ ein echtes Ideal, so folgt wegen $(*)$ aus $J_\lambda \subseteq J_\lambda$ auch $\tau(J_\lambda) \geq \lambda$. Wegen $(*)'$ gilt also $J'_\lambda \subseteq J_\lambda$. Insbesondere ist auch J'_λ ein echtes Ideal und aus $(*)'$ folgt wie eben wegen $J'_\lambda \subseteq J'_\lambda$ auch $\tau(J'_\lambda) \geq \lambda$. Mit $(*)$ erhalten wir schließlich $J_\lambda \subseteq J'_\lambda$.

Ist J_λ kein echtes Ideal, so ist auch J'_λ nicht echt, da wir sonst analog in der umgekehrten Reihenfolge argumentieren könnten. Also gilt auch in diesem Fall $J_\lambda = J'_\lambda$.

Wir beweisen nun die übrigen Eigenschaften, die im Lemma behauptet werden.

(i) Sei J_λ ein echtes Ideal. Mit $(*)$ folgt aus $J_\lambda \subseteq J_\lambda$ wie eben $\tau(J_\lambda) \geq \lambda$.

(ii) J_λ sei o. B. d. A. ein echtes Ideal. Nach (i) gilt dann $\tau(J_\lambda) \geq \lambda > \mu$, also auch $\tau(J_\lambda) \geq \mu$ und nach $(*)$ folgt $J_\mu \subseteq J_\lambda$.

(iii) Es sei $\lambda \in \mathrm{Wb}(\tau)$. Dann existiert ein $I \in \mathrm{Id}(A)$ mit $\lambda = \tau(I)$. Nach $(*)$ gilt $J_\lambda \subseteq I$ und $J_{\lambda^+} \not\subseteq I$, also insbesondere $J_\lambda \neq J_{\lambda^+}$. Nach (ii) gilt $J_\lambda \subseteq J_{\lambda^+}$, also insgesamt $J_\lambda \subsetneqq J_{\lambda^+}$.

Sei nun $J_\lambda \subsetneqq J_{\lambda^+}$. Dann ist $J_{\lambda^+} \not\subseteq J_\lambda$, also gilt nach $(*)$ $\tau(J_\lambda) \not\geq \lambda^+$, d. h. es gilt $\tau(J_\lambda) \leq \lambda$. Die Gleichheit folgt mit Hilfe von (i).

Die dritte Implikation ist trivial.

(iv) Ist $\lambda \in \mathrm{Wb}(\tau)$, so können wir nach (iii) ein $B_\lambda \in J_{\lambda^+} \setminus J_\lambda$ wählen. Nach (ii) ist die Abbildung $\lambda \mapsto B_\lambda$ eine injektive Abbildung von $\mathrm{Wb}(\tau)$ nach $\mathcal{P}(A)$, also folgt die Behauptung. $\square$

Um weitere Schlußfolgerungen zu erhalten, beschreiben wir zunächst die Gestalt der im obigen Lemma erwähnten Ideale J_λ.

Lemma 2.10 *Es sei τ eine monotone und stetige Idealabbildung und für $\lambda \in \mathrm{CN}$ sei J_λ das Ideal aus Lemma 2.9. Dann ist*

$$J_\lambda = \{B \subseteq A : \forall I \in \mathrm{Id}(A)\ (A \setminus B \in I \ \Rightarrow\ \tau(I) < \lambda)\}.$$

Beweis: Wir zeigen beide Inklusionen durch Kontraposition.

„$\subseteq$“ Sei $B \subseteq A$ und $I \in \mathrm{Id}(A)$ mit $A \setminus B \in I$ und $\tau(I) \geq \lambda$. Dann gilt $J_\lambda \subseteq I$ nach Lemma 2.9 ($*$). Da I ein echtes Ideal ist und $A \setminus B \in I$ gilt, folgt $B \notin I$, also auch $B \notin J_\lambda$.

„$\supseteq$“ Sei $B \notin J_\lambda$. Dann ist $I := J_\lambda \restriction B$ ein echtes Ideal mit $A \setminus B \in I$ und $J_\lambda \subseteq I$. Aufgrund der Monotonie von τ und nach Lemma 2.9 (i) gilt $\tau(I) \geq \tau(J_\lambda) \geq \lambda$. $\square$

Mit dieser Darstellung der Ideale J_λ lassen sich weitere grundlegende Aussagen beweisen.

Lemma 2.11 *Sei τ eine monotone und stetige Idealabbildung, für $\lambda \in \mathrm{CN}$ sei J_λ wie in Lemma 2.9.*

(i) Ist λ eine Limeskardinalzahl, so gilt $J_\lambda = \bigcup\{J_\mu : \mu < \lambda\}$.

(ii) Es gilt $J_\lambda = \bigcup\{J_{\mu^+} : \mu < \lambda\}$.

(iii) $\mathrm{Wb}(\tau)$ besitzt ein Maximum.

Beweis: (i) Es sei λ eine Limeskardinalzahl. Die Ungleichung „$\supseteq$“ folgt aus Lemma 2.9 (ii). Ferner ist $I := \bigcup\{J_\mu : \mu < \lambda\}$ als Vereinigung einer Kette von Idealen wieder ein Ideal auf A. Angenommen, es ist $J_\lambda \supsetneqq I$, d. h. wir können eine Menge $B \in J_\lambda \setminus I$ wählen. Dann ist $I \restriction B$ ein echtes Ideal, das die Menge $A \setminus B$ enthält. Wegen $B \in J_\lambda$ folgt $\mu := \tau(I \restriction B) < \lambda$ mit Hilfe von Lemma 2.10.

Da λ eine Limeskardinalzahl ist, gilt auch $\mu^+ < \lambda$, also ist $J_{\mu^+} \subseteq I \subseteq I \restriction B$, d. h. mit Lemma 2.9 (i) und der Monotonie von τ folgt

$$\mu^+ \leq \tau(J_{\mu^+}) \leq \tau(I \restriction B) = \mu,$$

ein Widerspruch.

(ii) Dies ist lediglich eine Zusammenfassung von (i) und Lemma 2.9 (ii).

(iii) Wir zeigen, daß $\max \mathrm{Wb}(\tau) = \min\{\lambda \in \mathrm{CN} : A \in J_{\lambda^+}\}$ gilt. Sei dazu $\lambda := \min\{\lambda \in \mathrm{CN} : A \in J_{\lambda^+}\}$. Nach (ii) folgt $A \notin J_\lambda$, also gilt $J_\lambda \subsetneqq J_{\lambda^+}$, d. h. es ist $\lambda \in \mathrm{Wb}(\tau)$ nach Lemma 2.9 (iii). Wegen $A \in J_{\lambda^+}$ folgt aus Lemma 2.10 für jedes $I \in \mathrm{Id}(A)$ die Ungleichung $\tau(I) < \lambda^+$, denn für jedes $I \in \mathrm{Id}(A)$ gilt $A \setminus A = \emptyset \in I$. Insgesamt folgt also $\lambda = \max \mathrm{Wb}(\tau)$. $\square$

Um im nächsten Abschnitt die Stetigkeit der Abbildung $I \mapsto \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$ zu zeigen, geben wir noch eine zur Stetigkeit äquivalente Bedingung an, die uns zur Definition der stabilen Ideale führen wird.

Lemma 2.12 *Es sei $A \neq \emptyset$ und τ eine monotone Idealabbildung auf A. Dann sind äquivalent:*

(i) τ ist stetig.

(ii) Zu jedem $I \in \mathrm{Id}(A)$ existiert ein $B \in I^+$, so daß für alle $J \in \mathrm{Id}(A)$ mit $J \supseteq I \restriction B$ gilt $\tau(J) = \tau(I)$.

Beweis: „(i) $\Rightarrow$ (ii)“ Es sei $I \in \mathrm{Id}(A)$ und $\lambda := \tau(I)$. O. B. d. A. existiere ein $J \supseteq I$, $J \in \mathrm{Id}(A)$ mit $\tau(J) > \lambda$, denn sonst können wir $B = A \in I^+$ wählen. Wir betrachten nun das echte Ideal

$$J^* := \bigcap\{J \in \mathrm{Id}(A) : J \supseteq I, \tau(J) \geq \lambda^+\}.$$

Aufgrund der Stetigkeit von τ gilt auch $\tau(J^*) \geq \lambda^+$, ferner ist $J^* \supseteq I$. Insgesamt folgt also $J^* \supsetneqq I$, d. h. wir können ein $B \in J^* \setminus I$ wählen.

Sei nun $J \supseteq I \restriction B$ ein echtes Ideal. Wir wollen $\tau(J) = \tau(I)$ zeigen. Wegen $I \subseteq I \restriction B \subseteq J$ und der Monotonie von τ gilt $\tau(I) \leq \tau(J)$. Angenommen, es ist $\tau(J) > \tau(I) = \lambda$, also $\tau(J) \geq \lambda^+$. Wegen $J \in \mathrm{Id}(A)$ und $J \supseteq I$ gilt nach Definition von J^* auch $J \supseteq J^*$. Also gilt einerseits $A \setminus B \in I \restriction B \subseteq J$, aber andererseits auch $B \in J^* \subseteq J$, also insgesamt $A \in J$, ein Widerspruch.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)“ Es sei Γ eine nichtleere Teilmenge von $\mathrm{Id}(A)$ und wir setzen $\lambda := \tau(\bigcap \Gamma)$. Da $\bigcap \Gamma \subseteq I$ für alle $I \in \Gamma$ gilt, folgt aus der Monotonie von τ auch $\lambda = \tau(\bigcap \Gamma) \leq \tau(I)$ für alle $I \in \Gamma$ und damit $\lambda \leq \min\{\tau(I) : I \in \Gamma\}$.

Um $\lambda \geq \min\{\tau(I) : I \in \Gamma\}$ zu beweisen, suchen wir ein $I \in \Gamma$ mit $\tau(I) \leq \lambda$. Da $\bigcap \Gamma$ ein echtes Ideal auf A ist, existiert nach Voraussetzung eine Menge $B \in (\bigcap \Gamma)^+$ mit $\tau(J) = \tau(\bigcap \Gamma) = \lambda$ für alle $J \supseteq (\bigcap \Gamma) \restriction B$. Wegen $B \notin \bigcap \Gamma$ existiert ein $I \in \Gamma$ mit $B \notin I$, also $B \in I^+$. Nun gilt $(\bigcap \Gamma) \restriction B \subseteq I \restriction B$, also gilt nach Wahl von B insbesondere $\tau(I \restriction B) = \lambda$. Wegen $I \subseteq I \restriction B$ folgt aus der Monotonie von τ schließlich $\tau(I) \leq \lambda$. □

2.3 Stabile Ideale

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß die Abbildung $I \mapsto \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$ eine stetige Idealabbildung ist. Wir werden dazu Lemma 2.12 verwenden und definieren den folgenden naheliegenden Begriff.

Definition 2.13 Es sei $\bar{H}$ eine Familie von Halbordnungen. Ein echtes Ideal I auf A heißt **stabil** für $\bar{H}$, falls $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) = \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$ für alle echten Ideale $J \supseteq I$ gilt.

Bemerkung 2.14 (i) Trivialerweise sind alle maximalen Ideale stabil. Ist ferner I ein Ideal, so daß $\prod \bar{H}/I$ eine wahre Kofinalität besitzt, so ist I ebenfalls stabil für $\bar{H}$. In Kapitel 5 zeigen wir, daß u. a. für den speziellen Fall der Produkte regulärer Kardinalzahlen auch die Umkehrung gilt.[1]

(ii) Um die Stetigkeit von $I \mapsto \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$ zu zeigen, reicht es also in Hinblick auf Lemma 2.12 das folgende zu zeigen: Ist I ein echtes Ideal, so existiert ein $B \in I^+$ mit $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I \restriction B) = \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$, so daß $I \restriction B$ stabil für $\bar{H}$ ist.

[1] Dies ist nicht überraschend, wenn man das folgende Resultat der pcf-Theorie kennt: Ist $a \subseteq \mathrm{Reg}$ progressiv und I ein echtes Ideal auf a, so daß für jeden Ultrafilter D mit $D \cap I = \emptyset$ gilt $\mathrm{tcf}(\prod a/D) = \lambda$, so gilt auch $\mathrm{tcf}(\prod a/I) = \lambda$. Wir werden in Kapitel 5 jedoch auch dieses Resultat ohne die Verwendung von Ultrafiltern beweisen.

Ein Kernstück des nun folgenden Beweises ist das folgende Lemma, welches eine Abwandlung von Lemma 2.1 in [3] ist und das wir später noch einmal verwenden können.

Lemma 2.15 *Es sei $\bar{H}$ eine progressive*[2] *Familie von Halbordnungen. Ferner sei $\lambda > |A|^+$ regulär und $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ eine Folge von Elementen von $\prod \bar{H}$. Dann existiert ein $g \in \prod \bar{H}$, so daß für alle $h \in \prod \bar{H}$ mit $g < h$ die Menge*

$$\{\alpha < \lambda : C(f_\alpha, g) = C(f_\alpha, h)\}$$

unbeschränkt in λ ist.

Beweis: Angenommen, dies ist nicht der Fall. Wir definieren rekursiv eine $<$-wachsende Folge $(g_\beta : \beta < |A|^+)$ von Elementen von $\prod \bar{H}$ sowie eine Folge $(\alpha_\beta : \beta < |A|^+)$ von Ordinalzahlen kleiner als λ.

Sei g_0 in $\prod \bar{H}$ beliebig. Ist $\gamma < |A|^+$ eine Limeszahl und $(g_\beta : \beta < \gamma)$ bereits gewählt, so können wir eine $<$-obere Schranke g_γ von $\{g_\beta : \beta < \gamma\}$ wählen, die aufgrund der Progressivität von $\bar{H}$ existiert.

Sei nun g_β gewählt. Nach Annahme existiert ein $g_{\beta+1} \in \prod \bar{H}$ mit $g_\beta < g_{\beta+1}$ sowie ein $\alpha_\beta < \lambda$

$$\forall \alpha \in \lambda \setminus \alpha_\beta \; C(f_\alpha, g_\beta) \neq C(f_\alpha, g_{\beta+1}).$$

Setzen wir nun $\alpha^* := \sup\{\alpha_\beta : \beta < |A|^+\} < \lambda$, so erhalten wir eine streng monoton fallende Folge $(C(f_{\alpha^*}, g_\beta) : \beta < |A|^+)$ von Teilmengen von A, ein Widerspruch. □

Wir sind nun in der Lage, das angekündigte Resultat zu beweisen.

Satz 2.16 *Sei $\bar{H}$ eine progressive Familie von Halbordnungen und I ein echtes Ideal auf A. Dann existiert ein $B \in I^+$, so daß $I \restriction B$ stabil ist und es gilt*

$$\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I \restriction B) = \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I).$$

[2] Hier würde es genügen, für alle $a \in A$ nur $\mathfrak{b}(H_a) \geq |A|^+$ vorauszusetzen. Die Progressivität von $\bar{H}$ bedeutet gerade $\mathfrak{b}(H_a) \geq |A|^{++}$ für alle $a \in A$.

Beweis: Es sei $\lambda := \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$. Nach Lemma 1.9 ist λ regulär und es gibt eine $<_I$-wachsende Folge $\bar{f} = (f_\alpha : \alpha < \lambda)$, die in $\prod \bar{H}$ bzgl. $<_I$ unbeschränkt ist. Da $\bar{H}$ progressiv ist, erhält man mit Hilfe der Lemmata 1.28 und 1.29 außerdem $\lambda > |A|^+$.

Wir können also Lemma 2.15 anwenden und erhalten eine Funktion $g \in \prod \bar{H}$ wie dort. Da g keine obere Schranke von $\bar{f}$ sein kann, existiert ein $\alpha < \lambda$ mit $B := C(f_\alpha, g) \in I^+$.

Um zu zeigen, daß B die geforderten Eigenschaften erfüllt, genügt es, wenn wir zeigen, daß für jedes echte Ideal $J \supseteq I \restriction B$ gilt $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) = \lambda$. Sei also $J \supseteq I \restriction B$ ein echtes Ideal. Wegen $I \restriction B \supseteq I$ gilt nach Lemma 1.25 zunächst $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) \geq \lambda$. Um $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) \leq \lambda$ zu zeigen, zeigen wir, daß die Folge $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ auch unbeschränkt bzgl. $<_J$ ist.

Angenommen es ist $h \in \prod \bar{H}$ eine $<_J$-obere Schranke von $\bar{f}$. Ohne Einschränkung können wir $g < h$ annehmen, denn $\bar{H}$ ist progressiv.

Nach Wahl von g existiert dann ein $\beta \in \lambda \setminus \alpha$ mit $C(f_\beta, g) = C(f_\beta, h)$.

Dann ist einerseits

$$B = C(f_\alpha, g) \subseteq_I C(f_\beta, g) = C(f_\beta, h) \in J,$$

andererseits aber auch

$$A \setminus C(f_\alpha, g) = A \setminus B \in I \restriction B \subseteq J,$$

d. h. insgesamt folgt $A \in J$, ein Widerspruch. $\square$

In Hinblick auf Lemma 2.12 ist somit auch die Stetigkeit der Abbildung $I \mapsto \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$ gezeigt. Wir können also die Resultate des letzten Abschnittes direkt übertragen und erhalten das folgende Korollar, dessen zweiter Teil eine alternative Definition des Ideals $J_{<\lambda}(\bar{H})$ darstellt.

Korollar 2.17 *Es sei $\bar{H}$ eine progressive Familie von Halbordnungen. Dann gilt:*

(i) Ist $\Gamma \neq \emptyset$ eine Menge von echten Idealen auf A , so gilt

$$\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/\bigcap \Gamma) = \min\{\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) : I \in \Gamma\}.$$

(ii) Existiert ein Ideal I auf A mit $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) \geq \lambda$, so ist

$$J_{<\lambda}(\bar{H}) = \bigcap\{I : I \text{ echtes Ideal mit } \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) \geq \lambda\}.$$

Anderenfalls ist $J_{<\lambda}(\bar{H}) = \mathcal{P}(A)$.

Es ist nun naheliegend, in Analogie zur pcf-Theorie noch die folgende Definition zu vereinbaren.

Definition 2.18 Ist $\bar{H}$ eine Familie von Halbordnungen, so definieren wir durch

$$\mathrm{p}\mathfrak{b}(\bar{H}) := \{\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) : I \text{ echtes Ideal auf } A\}$$

die Menge der möglichen Beschränktheitszahlen von $\bar{H}$.

Der Übersicht wegen wiederholen wir noch einmal die im vorigen Abschnitt erzielten Resultate.

Korollar 2.19 *Es sei $\bar{H}$ eine progressive Familie von Halbordnungen. Dann gilt:*

(i) Ist $J_{<\lambda}(\bar{H})$ ein echtes Ideal, so gilt $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J_{<\lambda}(\bar{H})) \geq \lambda$, folglich ist $\prod \bar{H}/J_{<\lambda}(\bar{H})$ eine λ-gerichtete Halbordnung.

(ii) Ist $\mu < \lambda$, so ist $J_{<\mu}(\bar{H}) \subseteq J_{<\lambda}(\bar{H})$.

(iii) Ist I ein echtes Ideal, so gilt $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) \geq \lambda$ gdw. $J_{<\lambda}(\bar{H}) \subseteq I$.

(iv) Es sind äquivalent:

(a) $\lambda \in \mathrm{p}\mathfrak{b}(\bar{H})$,

(b) $J_{<\lambda}(\bar{H}) \subsetneqq J_{<\lambda^+}(\bar{H})$,

(c) $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J_{<\lambda}(\bar{H})) = \lambda$.

(v) $|\,\mathrm{p}\mathfrak{b}(\bar{H})| \leq 2^{|A|}$.

(vi) $J_{<\lambda}(\bar{H}) = \{B \subseteq A : \forall I \in \mathrm{Id}(A)\ (A \setminus B \in I \ \Rightarrow\ \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) < \lambda)\}$.

(vii) Ist λ Limeskardinalzahl, so gilt $J_{<\lambda}(\bar{H}) = \bigcup_{\mu<\lambda} J_{<\mu}(\bar{H})$.

(viii) *Es gilt* $J_{<\lambda}(\bar{H}) = \bigcup_{\mu<\lambda} J_{<\mu^+}(\bar{H})$.

(ix) $\mathrm{p}\mathfrak{b}(\bar{H})$ *besitzt ein Maximum.*

Wir geben noch ein weiteres zur pcf-Theorie analoges Resultat an.

Lemma 2.20 *Es sei* $\bar{H}$ *eine progressive Familie von Halbordnungen und* λ *eine Kardinalzahl. Ist* $B \in J_{<\lambda^+}(\bar{H}) \setminus J_{<\lambda}(\bar{H})$, *so ist* $J_{<\lambda}(\bar{H}) \upharpoonright B$ *ein stabiles Ideal mit*

$$\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J_{<\lambda}(\bar{H}) \upharpoonright B) = \lambda.$$

Beweis: Es reicht zu zeigen: Ist $J \supseteq J_{<\lambda}(\bar{H}) \upharpoonright B$ ein echtes Ideal, so gilt $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) = \lambda$. Sei also $J \supseteq J_{<\lambda}(\bar{H}) \upharpoonright B$.

Es gilt $J_{<\lambda}(\bar{H}) \subseteq J$, also folgt nach Korollar 2.19 (iii) die Ungleichung $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) \geq \lambda$.

Angenommen, es wäre $J_{<\lambda^+}(\bar{H}) \subseteq J$. Dann wäre $B \in J_{<\lambda^+}(\bar{H}) \subseteq J$ und $A \setminus B \in J_{<\lambda}(\bar{H}) \upharpoonright B \subseteq J$, also J kein echtes Ideal. Dieser Widerspruch zeigt $J_{<\lambda^+}(\bar{H}) \not\subseteq J$ und wieder nach Lemma 2.19 (iii) folgt auch $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) \leq \lambda$.$\Box$

Für die Werte $\lambda = |A|^+$, $\lambda = |A|^{++}$ usw. können wir direkt angeben, wie das Ideal $J_{<\lambda}(\bar{H})$ aussieht. Dies ist zwar hinsichtlich der typischen Anwendungen der pcf-Theorie nicht interessant, befreit uns aber davon, im nächsten Kapitel die dortigen Resultate zum Existenzbeweis der sogenannten Generatoren in ihrer stärksten Form zu beweisen.

Lemma 2.21 *Es sei* $\bar{H}$ *eine progressive Familie von Halbordnungen. Für alle* $n < \omega$, *ist* $J_{<|A|^{+n+1}}(\bar{H})$ *das von der Menge* $\{a \in A : \mathfrak{b}(H_a) \leq |A|^{+n}\}$ *erzeugte Hauptideal, d. h. es gilt*

$$J_{<|A|^{+n+1}}(\bar{H}) = \{B \subseteq A : \forall a \in B\ \mathfrak{b}(H_a) \leq |A|^{+n}\}.$$

Beweis: Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion. Es ist $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/\{\emptyset\}) = \mathfrak{b}(\prod \bar{H}) = \min\{\mathfrak{b}(H_a) : a \in A\} \geq |A|^+$ nach Lemma 1.12, also gilt $J_{<|A|^+}(\bar{H}) \subseteq \{\emptyset\} = \{B \subseteq A : \forall a \in B\ \mathfrak{b}(H_a) \leq |A|\}$ nach Korollar 2.19 (iii). Damit ist der Induktionsanfang gezeigt.

Zum Beweis des Induktionsschrittes gelte die Behauptung für $n < \omega$ und es sei

$$J := \{B \subseteq A : \forall a \in B \ \mathfrak{b}(H_a) \leq |A|^{+n+1}\}.$$

Offensichtlich ist J ein Ideal. Um $J_{<|A|^{+n+2}}(\bar{H}) \subseteq J$ zu zeigen, können wir o. B. d. A. annehmen, daß J ein echtes Ideal ist. Dann gilt

$$\liminf{}_J(\mathfrak{b}(H_a) : a \in A) > |A|^{+n+1}.$$

Nach Lemma 1.29 ist also $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) \geq |A|^{+n+2}$, d. h. es ist $J_{<|A|^{+n+2}}(\bar{H}) \subseteq J$ nach Korollar 2.19 (iii).

Es bleibt also $J \subseteq J_{<|A|^{+n+2}}(\bar{H})$ zu zeigen. Da nach Induktionsvoraussetzung $\{a \in A : \mathfrak{b}(H_a) \leq |A|^{+n}\} \in J_{<|A|^{+n+1}}(\bar{H}) \subseteq J_{<|A|^{+n+2}}(\bar{H})$ gilt, reicht es zu zeigen, daß auch

$$B := \{a \in A : \mathfrak{b}(H_a) = |A|^{+n+1}\} \in J_{<|A|^{+n+2}}(\bar{H})$$

gilt. Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann ist $I := J_{<|A|^{+n+2}}(\bar{H}) \restriction B$ ein echtes Ideal, also müßte $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) \geq |A|^{+n+2}$ gelten. Es ist jedoch $B =_I A$, nach Lemma 1.31 folgt also $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) = |A|^{+n+1}$, ein Widerspruch. $\square$

Kapitel 3

Kombinatorische Hilfsmittel

Ziel dieses Kapitels ist es, ein kombinatorisches Resultat von S. Shelah zu beweisen, das wir für den Beweis der Existenz von Generatoren verwenden können. Im ersten Abschnitt führen wir dazu das Modell $H(\Theta)$ ein, welches sich auch als ein kombinatorisches Hilfsmittel auffassen läßt, wie E. Weitz in [11] dargelegt hat.

Im zweiten Abschnitt beweisen wir dann zunächst ein Resultat von S. Shelah über sogenannte „club guessing sequences“. Dieses verwenden wir zusammen mit der Methode des Modells $H(\Theta)$ anschließend, um das Hauptresultat dieses Kapitels zu beweisen.

3.1 Das Modell $H(\Theta)$

Um das Modell $H(\Theta)$, das ein beliebtes Hilfsmittel der modernen Mengenlehre darstellt, einzuführen, beginnen wir mit einigen benötigten Definitionen.

Definition 3.1 Eine Menge x heißt **transitiv**, falls für alle $y \in x$ gilt $y \subseteq x$. Die **transitive Hülle** von x ist definiert durch

$$\mathrm{tc}(x) := \bigcap\{y \supseteq x : y \text{ transitiv}\}.$$

Zu jeder Menge x existiert eine transitive Obermenge, ist nämlich $x \in V_\alpha$ für ein $\alpha \in \mathrm{ON}$, so ist V_α transitiv und es gilt $x \subseteq V_\alpha$. Da ferner der Durchschnitt transitiver Mengen wieder transitiv ist, ist $\mathrm{tc}(x)$ stets die kleinste transitive Obermenge von x. Die Operation $\operatorname{tc}(x)$ hat die damit die üblichen Eigenschaften eines Hüllenoperators, eine weitere Eigenschaft halten wir im folgenden Lemma fest.

Lemma 3.2 *Ist x eine Menge, so gilt* $\operatorname{tc}(x) = x \cup \bigcup\{\operatorname{tc}(y) : y \in x\}$.

Beweis: „$\supseteq$“ Zunächst gilt sicher $x \subseteq \operatorname{tc}(x)$. Es bleibt noch zu zeigen: Ist $y \in x$, so ist $\operatorname{tc}(y) \subseteq \operatorname{tc}(x)$.

Sei also $y \in x$. Wegen $x \subseteq \operatorname{tc}(x)$ gilt auch $y \in \operatorname{tc}(x)$ und da $\operatorname{tc}(x)$ transitiv ist, folgt $y \subseteq \operatorname{tc}(x)$, d. h. $\operatorname{tc}(x)$ ist eine transitive Obermenge von y. Nach Definition von $\operatorname{tc}(y)$ folgt $\operatorname{tc}(y) \subseteq \operatorname{tc}(x)$, was zu zeigen war.

„$\subseteq$“ Nach Definition von $\operatorname{tc}(x)$ reicht es zu zeigen, daß $x \cup \bigcup\{\operatorname{tc}(y) : y \in x\}$ eine transitive Obermenge von x ist. Nach Ersetzungsaxiom ist es eine Menge, offensichtlich eine Obermenge von x.

Um die Transitivität zu beweisen, sei $z \in x \cup \bigcup\{\operatorname{tc}(y) : y \in x\}$. Ist $z \in x$, so gilt $z \subseteq \operatorname{tc}(z) \subseteq \bigcup\{\operatorname{tc}(y) : y \in x\}$. Anderenfalls existiert ein $y \in x$ mit $z \in \operatorname{tc}(y)$. Da $\operatorname{tc}(y)$ transitiv ist, gilt $z \subseteq \operatorname{tc}(y) \subseteq \bigcup\{\operatorname{tc}(y) : y \in x\}$. $\square$

Wir können nun die von uns verwendete Menge $H(\Theta)$ definieren.

Definition 3.3 Ist Θ eine Kardinalzahl, so definieren wir

$$H(\Theta) := \{x : |\operatorname{tc}(x)| < \Theta\}.$$

Zunächst überlegen wir uns, daß $H(\Theta)$ eine transitive Menge ist, und zeigen einige starke Abgeschlossenheitseigenschaften von $H(\Theta)$.

Lemma 3.4 *Es sei Θ eine reguläre Kardinalzahl.*

(i) $H(\Theta)$ ist eine transitive Menge.

(ii) Ist $x \subseteq H(\Theta)$ mit $|x| < \Theta$, so ist $x \in H(\Theta)$.

(iii) Ist $x \in H(\Theta)$ und $y \subseteq x$, so ist $y \in H(\Theta)$.

Beweis: (i) Ist $y \in x \in H(\Theta)$, so gilt $y \subseteq \operatorname{tc}(x)$, also auch $\operatorname{tc}(y) \subseteq \operatorname{tc}(x)$ und somit $|\operatorname{tc}(y)| \leq |\operatorname{tc}(x)| < \Theta$. Also ist $H(\Theta)$ transitiv.

Um zu zeigen, daß $H(\Theta)$ eine Menge ist, zeigen wir $H(\Theta) \subseteq V_\Theta$. Dazu zeigen wir die Aussage

$$\forall x(x \in H(\Theta) \Rightarrow x \in V_\Theta)$$

durch Induktion über die $\in$-Relation. Sei also $x \in H(\Theta)$ und es gelte die Induktionsvoraussetzung $\forall y \in x(y \in H(\Theta) \Rightarrow y \in V_\Theta)$.

Ist $y \in x$, so ist aufgrund der Transitivität von $H(\Theta)$ auch $y \in H(\Theta)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist also auch $y \in V_\Theta$. Da Θ eine Limeszahl ist, existiert ein $\alpha(y) < \Theta$ mit $y \in V_{\alpha(y)}$.

Da Θ regulär und $|x| \leq |\operatorname{tc}(x)| < \Theta$ gilt, ist $\alpha := \sup_{y \in x} \alpha(y) < \Theta$, also gilt $x \subseteq V_\alpha$, d. h. $x \in V_{\alpha+1} \subseteq V_\Theta$.

(ii) Sei $x \subseteq H(\Theta)$ mit $|x| < \Theta$. Für $y \in x$ ist damit $|\operatorname{tc}(y)| < \Theta$. Wegen $\operatorname{tc}(x) = x \cup \bigcup_{y \in x} \operatorname{tc}(y)$ folgt aus der Regularität von Θ auch $|\operatorname{tc}(x)| < \Theta$, also $x \in H(\Theta)$.

(iii) Sei $x \in H(\Theta)$ und $y \subseteq x$. Da $H(\Theta)$ transitiv ist, gilt $x \subseteq H(\Theta)$, also auch $y \subseteq H(\Theta)$. Ferner ist $y \subseteq x \subseteq \operatorname{tc}(x)$, also $|y| \leq |x| \leq |\operatorname{tc}(x)| < \Theta$. Nach (ii) gilt also $y \in H(\Theta)$. $\square$

Mit Hilfe des obigen Lemmas zeigt man leicht, daß $H(\Theta)$ auch gegen viele Operationen, die wir häufig benutzen, abgeschlossen ist. Sind beispielsweise $x, y \in H(\Theta)$ und ist $f : x \to y$, so sind auch $\bigcup x$, $x \cup y$, $x \cap y$, $\{x\}$, $\{x, y\}$, (x, y), $x \times y$, f, $\operatorname{Db}(f)$, $\operatorname{Wb}(f)$ und $f(x)$ Elemente von $H(\Theta)$.

Leider sind die Mengen $H(\Theta)$ für unsere Zwecke zu groß. Um kleinere Teilmengen von $H(\Theta)$ mit hinreichenden Abgeschlossenheitseigenschaften zu erhalten, betrachten wir $H(\Theta)$ in der folgenden Weise als Modell der Mengenlehre.

Ist $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ eine Formel[1], M eine Menge und sind $x_0, \dots, x_n \in M$, so steht die Aussage „in M gilt $\varphi(x_0, \dots, x_n)$" und die von uns dafür verwendete Schreibweise $M \models \varphi(x_0, \dots, x_n)$ für die Relativierung der Formel

[1] Mit Formel ist stets eine Formel der Prädikatenlogik erster Stufe zur Sprache der Mengenlehre, also mit dem zweistelligen Prädikat $\in$, gemeint. Da die Resultate dieser Arbeit als „in ZFC beweisbar" zu verstehen sind, wir aber selbstverständlich auf eine – im Prinzip durchführbare – formale Ausarbeitung verzichten, verstehen wir auch Eigenschaften wie z. B. „x ist transitiv" als Formeln, hier beispielsweise als die Formel $\forall y\ (y \in x \Rightarrow \forall z\ (z \in y \Rightarrow z \in x))$. In diesem Sinne sind Aussagen *über* Formeln natürlich als metasprachliche Bemerkungen zu verstehen.

$\varphi(x_0, \dots, x_n)$ bzgl. M. Diese Relativierung ist grob gesprochen diejenige Formel, die entsteht, wenn man alle Vorkommen von $\forall x$ und $\exists x$ in $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ durch $\forall x \in M$ bzw. $\exists x \in M$ ersetzt, und wird mit $\varphi(x_0, \dots, x_n)^M$ bezeichnet.

Eine genauere Einführung zu diesem Thema findet der Leser in [4] oder in [6]. Dort wird z. B. auch mit Hilfe der starken Abgeschlossenheitseigenschaften gezeigt, daß für überabzählbare reguläre Kardinalzahlen Θ alle Axiome von ZFC bis auf das Potenzmengenaxiom in $H(\Theta)$ gelten.

Anstelle der Mengen $H(\Theta)$ verwenden wir die im folgenden definierten elementaren Unterstrukturen. Dadurch erhalten wir mit Hilfe des Satzes von Löwenheim und Skolem kleinere Mengen, verlieren jedoch die starken Abgeschlossenheitseigenschaften aus Lemma 3.4. Die Abgeschlossenheit gegenüber vielen mengentheoretischen Operationen gewinnen wir jedoch später mit Hilfe der Absolutheit von Formeln zurück. Wir beginnen nun damit, das hier skizzierte Vorgehen zu präzisieren.

Definition 3.5 Eine Menge $M \subseteq H(\Theta)$ heißt **elementare Unterstruktur** von $H(\Theta)$, falls für alle Formeln[2] $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ und alle $x_1, \dots, x_n \in M$ gilt

$$M \models \varphi(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow H(\Theta) \models \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Die Existenz kleinstmöglicher elementarer Unterstrukturen, die gewisse vorgegebene Elemente enthalten, liefert der folgende Satz.

Satz 3.6 (Löwenheim, Skolem) *Es sei Θ eine reguläre Kardinalzahl und $X \subseteq H(\Theta)$. Dann existiert eine elementare Unterstruktur M von $H(\Theta)$ mit $X \subseteq M$ und $|M| \leq |X| \cdot \aleph_0$.*

[2] Der aufmerksame Leser wird bemerken, daß es sich in dieser Form nicht um eine formale Definition handelt. Um eine formal korrekte Definition und einen Beweis des folgenden Satzes durchführen zu können, müßten wir zu jeder Formel φ als formales Gegenstück eine Menge (d. h. genauer ein Klassenterm) $\ulcorner\varphi\urcorner$ definieren. Damit wäre es möglich, eine geeignete formale Relation $\models$ zu definieren und schließlich durch metasprachliche Induktion über den Aufbau der Formeln zu zeigen, daß für jede Formel $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ gilt

$$\forall M\ \forall a_0, \dots, a_n \in M\ \Big(\big(M, (a_0, \dots, a_n)\big) \models \ulcorner\varphi\urcorner \ \Leftrightarrow\ \varphi(a_0, \dots, a_n)^M \Big).$$

Dies würde dazu führen, das (formal korrekt definierte) elementare Unterstrukturen insbesondere die in der Definition angegebene Eigenschaft besitzen. Daher ignorieren wir dieses Problem und verwenden die obige, für unsere Zwecke besser geeignete, Definition.

Um auch für elementare Unterstrukturen die Abgeschlossenheit gegenüber vielen mengentheoretischen Operationen zu erhalten, verwenden wir den folgenden metasprachlichen Begriff.

Definition 3.7 Eine Eigenschaft $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ heißt **absolut** für eine Menge M, falls für alle $x_1, \dots, x_n \in M$ gilt

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow M \models \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Das folgende Lemma ist grundlegend für die Anwendung absoluter Formeln, um Abgeschlossenheitseigenschaften von $H(\Theta)$ auf elementare Unterstrukturen zu übertragen.

Lemma 3.8 *Ist $\varphi(\vec{x}, y)$ absolut für $H(\Theta)$ und gilt*

$$\forall \vec{x} \in H(\Theta)\ \exists y \in H(\Theta)\ \varphi(\vec{x}, y),$$

so gilt auch für jede elementare Unterstruktur M von $H(\Theta)$

$$\forall \vec{x} \in M\ \exists y \in M\ \varphi(\vec{x}, y).$$

Insbesondere gilt: Ist $F(\vec{x})$ eine Operation, gegen die $H(\Theta)$ abgeschlossen ist und ist die Formel $y = F(\vec{x})$ absolut für $H(\Theta)$, so ist auch jede elementare Unterstruktur von $H(\Theta)$ abgeschlossen gegen $F(\vec{x})$.

Um Formeln zu erhalten, die absolut für $H(\Theta)$ sind, läßt sich die Transitivität von $H(\Theta)$ verwenden. So sind Formeln, die nur beschränkte Quantoren der Form $\exists x \in y$, $\forall x \in y$ enthalten, absolut für jede transitive Menge. Damit erhält man z. B. die Absolutheit der entsprechenden Formeln für die im Anschluß an Lemma 3.4 angegebenen Beispiele.

Tatsächlich besitzt das Modell $H(\Theta)$ weitaus stärkere Absolutheitseigenschaften; in [2] findet man eine ausführliche Beschreibung dieses Sachverhaltes. Auch die von uns im folgenden benötigten absoluten Formeln kann man entweder dort finden oder leicht selbst herleiten.

Wir geben noch ein erstes einfaches Beispiel für die Verwendung dieser Methode an, das wir später verwenden können.

Lemma 3.9 *Es seien $\lambda < \Theta$ reguläre Kardinalzahlen, E ein Club in λ und M eine elementare Unterstruktur von $H(\Theta)$ mit $\lambda, E \in M$ und $|M| < \lambda$. Dann ist $\sup(M \cap \lambda) \in E$.*

Beweis: Es gilt $\forall\alpha < \lambda\ \exists\beta \in E\ \alpha < \beta$. Da diese Formel absolut für $H(\Theta)$ ist und $\lambda, E \in M$ gilt, erhalten wir auch $M \models \forall\alpha < \lambda\ \exists\beta \in E\ \alpha < \beta$. Dies bedeutet aber gerade

$$\forall\alpha \in M \cap \lambda\ \exists\beta \in M \cap E\ \alpha < \beta.$$

Wegen $|M| < \lambda$ und da λ regulär ist, gilt $\sup(M \cap \lambda) < \lambda$. Weil E ein Club in λ ist, reicht es noch zu zeigen, daß $\sup(M \cap \lambda)$ ein Häufungspunkt von E ist. Sei dazu $\gamma < \sup(M \cap \lambda)$. Dann existiert ein $\alpha \in M \cap \lambda$ mit $\gamma < \alpha$. Aufgrund der obigen Aussage existiert dazu ein $\beta \in M \cap E$ mit $\alpha < \beta$. Wegen $E \subseteq \lambda$ gilt auch $\beta \in M \cap \lambda$, also $\gamma < \beta \leq \sup(M \cap \lambda)$ und $\beta \in E$. $\square$

Zum Abschluß verfeinern wir unsere Methode noch durch den folgenden Begriff.

Definition 3.10 Eine Folge $(M_\xi : \xi < \kappa)$ heißt eine **Approximationsfolge in** $H(\Theta)$, falls für alle $\xi < \kappa$ gilt:

(i) M_ξ ist eine elementare Unterstruktur von $H(\Theta)$.

(ii) $M_\xi \subseteq M_{\xi+1}$.

(iii) Ist ξ Limeszahl, so ist $M_\xi = \bigcup_{\zeta<\xi} M_\zeta$.

(iv) $(M_\zeta : \zeta \leq \xi) \in M_{\xi+1}$.

Die Eigenschaften (i) bis (iii) besagen, daß eine Approximationsfolge in $H(\Theta)$ eine stetige Kette von elementaren Unterstrukturen von $H(\Theta)$ ist. Durch ein weiteres Standardresultat der Modelltheorie erhalten wir wieder Approximationsfolgen, die evtl. vorgegebene Elemente enthalten, aber nicht zu groß werden.

Lemma 3.11 *Es sei $\mathfrak{M}$ eine Kette von elementaren Unterstrukturen von $H(\Theta)$, d. h. für alle $M, N \in \mathfrak{M}$ gelte $M \subseteq N$ oder $N \subseteq M$. Dann ist auch $\bigcup \mathfrak{M}$ eine elementare Unterstruktur von $H(\Theta)$.*

Lemma 3.12 *Seien $\mu > \aleph_0$ regulär und $\kappa \leq \mu$. Es sei $X \subseteq H(\Theta)$ mit $|X| < \mu$ und für $\xi < \kappa$ sei $Y_\xi \subseteq H(\Theta)$ mit $|Y_\xi| < \mu$. Dann existiert eine Approximationsfolge $(M_\xi : \xi < \kappa)$ in $H(\Theta)$ mit $X \subseteq M_0$, $Y_\xi \subseteq M_{\xi+1}$ und $|M_\xi| < \mu$ für alle $\xi < \kappa$.*

Beweis: Wähle eine elementare Unterstruktur M_0 von $H(\Theta)$ mit $X \subseteq M_0$ und $|M_0| \leq |X| \cdot \aleph_0 < \mu$.

Im Nachfolgerschritt wähle $M_{\xi+1}$ mit $M_\xi \cup Y_\xi \cup \{(M_\zeta : \zeta \leq \xi)\} \subseteq M_{\xi+1}$ und $|M_{\xi+1}| \leq (|M_\xi| + |Y_\xi| + 1) \cdot \aleph_0 < \mu$.

Ist $\xi < \kappa$ Limeszahl, so gilt $|\bigcup_{\zeta<\xi} M_\zeta| < \mu$, denn es gilt $\kappa \leq \mu$ und μ ist regulär. Also setzen wir $M_\xi := \bigcup_{\zeta<\xi} M_\zeta$. □

Die folgenden nützlichen Lemmata zeigen, wie insbesondere Eigenschaft (iv) der Definition der Approximationsfolgen dafür sorgt, daß die Strukturen sehr reichhaltig werden.

Lemma 3.13 *Es sei $(M_\xi : \xi < \kappa)$ eine Approximationsfolge in $H(\Theta)$. Dann gilt für alle $\xi < \kappa$:*

(i) $\xi \subseteq M_\xi$.

(ii) Ist $\zeta < \xi$, so ist $M_\zeta \in M_\xi$.

Beweis: Offensichtlich gilt zunächst für alle $\zeta < \xi < \kappa$ die Eigenschaft $M_\zeta \subseteq M_\xi$. Wir verwenden nun die Abgeschlossenheit von $H(\Theta)$ gegenüber den Operationen $\mathrm{Db}(f)$, $\bigcup x$ und $f(x)$ sowie die Absolutheit der entsprechenden Formeln.

Ist $\xi < \kappa$, so gilt $\xi + 1 = \mathrm{Db}(M_\zeta : \zeta \leq \xi) \in M_{\xi+1}$. Also gilt für $\zeta < \xi$ stets $\zeta = \bigcup(\zeta + 1) \in M_{\zeta+1} \subseteq M_\xi$, damit ist also $\xi \subseteq M_\xi$ gezeigt. Ferner ist auch $M_\zeta = (M_\xi : \xi \leq \zeta)(\zeta) \in M_{\zeta+1} \subseteq M_\xi$, also ist (ii) bewiesen. □

Lemma 3.14 *Seien $\lambda < \Theta$ regulär und $(M_\xi : \xi < \kappa)$ eine Approximationsfolge in $H(\Theta)$ mit $\lambda \in M_0$ und $|M_\xi| < \lambda$ für alle $\xi < \kappa$. Dann ist $(\sup(M_\xi \cap \lambda) : \xi < \kappa)$ eine Normalfolge von Ordinalzahlen kleiner als λ.*

Beweis: Wegen $|M_\xi| < \lambda$ gilt $\sup(M_\xi \cap \lambda) < \lambda$ für alle $\xi < \kappa$. Die Stetigkeit der Folge folgt sofort aus der Stetigkeit der Folge $(M_\xi : \xi < \kappa)$. Es bleibt also noch $\sup(M_\zeta \cap \lambda) < \sup(M_\xi \cap \lambda)$ für $\zeta < \xi < \kappa$ zu zeigen. Ist also $\zeta < \xi < \kappa$, so gilt $M_\zeta \in M_\xi$ nach vorherigem Lemma. Ferner ist nach Voraussetzung $\lambda \in M_0 \subseteq M_\xi$. Damit folgt auch $M_\zeta \cap \lambda \in M_\xi$ sowie $\eta := \sup(M_\zeta \cap \lambda) \in M_\xi$. Schließlich erhalten wir auch $\eta + 1 = \eta \cup \{\eta\} \in M_\xi \cap \lambda$, also gilt offensichtlich $\sup(M_\zeta \cap \lambda) < \eta + 1 \leq \sup(M_\xi \cap \lambda)$. □

3.2 Zwei kombinatorische Resultate

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einem Resultat über sogenannte „club guessing sequences“, das von S. Shelah stammt. Zusammen mit den modelltheoretischen Methoden des vorherigen Abschnittes verwenden wir dieses Resultat schließlich, um das ebenfalls von S. Shelah stammende Hauptergebnis dieses Kapitels zu beweisen.

Definition 3.15 Es sei λ eine überabzählbare reguläre Kardinalzahl. Eine Folge $(C_\alpha : \alpha \in S)$ heißt **Clubfolge** in λ, falls $S \subseteq \mathrm{Lim}$ stationär in λ ist und für alle $\alpha \in S$ die Menge C_α ein Club in α mit $\operatorname{otp} C_\alpha = \operatorname{cf}(\alpha)$ ist.

Die Existenz einer Clubfolge ist trivial, denn ist α eine Limeszahl, so existiert stets ein Club C in α mit $\operatorname{otp} C = \operatorname{cf}(\alpha)$. Wir wollen jedoch die Existenz einer Clubfolge beweisen, die zusätzlich die im folgenden definierte Eigenschaft besitzt.

Definition 3.16 Eine Clubfolge $(C_\alpha : \alpha \in S)$ in λ heißt **vorhersagend**, falls zu jedem Club E in λ ein $\alpha \in S$ mit $C_\alpha \subseteq E$ existiert.

Ziel ist es, unter bestimmten Voraussetzungen eine vorhersagende Clubfolge zu konstruieren. Dazu wird uns die folgende Operation nützlich sein, die wir aus [5] übernehmen.

Definition 3.17 Es seien $C, E \subseteq \mathrm{ON}$ Mengen. Dann definieren wir

$$\mathrm{Drop}_E(C) := \{\sup(E \cap \gamma) : \gamma \in C\}.$$

Das folgende Lemma zeigt, daß wir mit Hilfe dieser Operation einen Club C in $\alpha < \lambda$ in einen gegebenen Club E in λ „versenken“ können, wobei auch das Ergebnis $\mathrm{Drop}_E(C)$ an genügend vielen Stellen wieder ein Club in α ist. Die Idee des Beweises von Satz 3.20 ist dann, dies so oft zu wiederholen, bis das Ergebnis eine vorhersagende Clubfolge ist. Um dies oft genug tun zu können, benötigen wir die Voraussetzung $\kappa^+ < \lambda$ und erhalten dann eine vorhersagende Clubfolge der Form $(C_\alpha : \alpha \in S^\lambda_\kappa)$.

Lemma 3.18 *Es sei $\alpha < \lambda$, $E \subseteq \lambda$ ein Club in λ und $C \subseteq \alpha$ ein Club in α. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{Drop}_E(C) \subseteq E$.

(ii) $\mathrm{otp}\,\mathrm{Drop}_E(C) \leq \mathrm{otp}\,C$.

(iii) Ist α ein Häufungspunkt von E, so ist $\mathrm{Drop}_E(C)$ ein Club in α.

Beweis: (i) Sei $\beta \in \mathrm{Drop}_E(C)$, d. h. es gibt ein $\gamma \in C$ mit $\beta = \sup(E \cap \gamma)$.

Angenommen, es ist $\beta \notin E$. Wir zeigen $\beta = \sup(E \cap \beta)$ (und erhalten einen Widerspruch, da E ein Club ist). Offensichtlich gilt $\beta \geq \sup(E \cap \beta)$. Ist umgekehrt $\delta < \beta = \sup(E \cap \gamma)$, so existiert ein $\varepsilon \in E \cap \gamma$ mit $\delta < \varepsilon \leq \beta$. Aufgrund der Annahme $\beta \notin E$ folgt sogar $\delta < \varepsilon < \beta$, also ist $\delta < \varepsilon \in E \cap \beta$ und damit haben wir $\delta < \sup(E \cap \beta)$ gezeigt.

(ii) Die Abbildung $\left\{ \begin{array}{ccc} C & \to & \mathrm{Drop}_E(C) \\ \alpha & \mapsto & \sup(E \cap \alpha) \end{array} \right.$ ist monoton wachsend und surjektiv, also folgt die Behauptung.

(iii) Wir zeigen zunächst, daß $\delta < \lambda$ genau dann ein Häufungspunkt von $\mathrm{Drop}_E(C)$ ist, wenn δ sowohl Häufungspunkt von E als auch Häufungspunkt von C ist.

Sei also δ ein Häufungspunkt von $\mathrm{Drop}_E(C)$. Dann existiert zunächst eine streng monoton wachsende Folge $(\delta_i : i < \mathrm{cf}(\delta))$ von Elementen von $\mathrm{Drop}_E(C) \cap \delta$, die unbeschränkt in δ ist.

Nach Definition von $\mathrm{Drop}_E(C)$ existieren ferner $\gamma_i \in C$ mit $\delta_i = \sup(E \cap \gamma_i)$. Offensichtlich gilt $\delta_i \leq \gamma_i$. Wegen $\sup(E \cap \gamma_i) = \delta_i < \delta_{i+1} = \sup(E \cap \gamma_{i+1})$ können wir weiterhin $\varepsilon_i \in E \cap \gamma_{i+1}$ wählen mit $\delta_i < \varepsilon_i$. Es folgt $\varepsilon_i \leq \delta_{i+1}$ sowie $\gamma_i \leq \varepsilon_i$. (Wäre $\varepsilon_i < \gamma_i$, so wäre $\varepsilon_i \leq \sup(E \cap \gamma_i) = \delta_i$ im Widerspruch zur Wahl von ε_i.) Insgesamt erhalten wir also $\delta_i \leq \gamma_i \leq \varepsilon_i \leq \delta_{i+1} < \delta$, d. h. es gilt $\delta = \sup \underbrace{\{\gamma_i : i < \mathrm{cf}(\delta)\}}_{\subseteq C \cap \delta} = \sup \underbrace{\{\varepsilon_i : i < \mathrm{cf}(\delta)\}}_{\subseteq E \cap \delta}$, also ist δ sowohl Häufungspunkt von C als auch von E.

Sei umgekehrt δ ein Häufungspunkt von C und E. Um zu zeigen, daß δ ein Häufungspunkt von $\mathrm{Drop}_E(C)$ ist, sei $\beta < \delta$. Dann existiert ein $\varepsilon \in E \cap \delta$ mit $\beta < \varepsilon$ sowie ein $\gamma \in C \cap \delta$ mit $\varepsilon < \gamma$. Es folgt $\beta < \varepsilon \leq \sup(E \cap \gamma) \in \mathrm{Drop}_E(C)$ und $\sup(E \cap \gamma) \leq \gamma < \delta$.

Nun können wir leicht (iii) zeigen: Zunächst gilt sicher $\mathrm{Drop}_E(C) \subseteq \alpha$, denn ist $\beta \in \mathrm{Drop}_E(C)$, so existiert ein $\gamma \in C \subseteq \alpha$ mit $\beta = \sup(E \cap \gamma) \leq \gamma < \alpha$.

$\mathrm{Drop}_E(C)$ ist unbeschränkt in α, denn α ist nach Voraussetzung ein Häufungspunkt von E und C.

Außerdem ist $\mathrm{Drop}_E(C)$ abgeschlossen, denn ist $\delta < \alpha$ ein Häufungspunkt von $\mathrm{Drop}_E(C)$, so ist δ auch ein Häufungspunkt von C. Da C ein Club ist, folgt $\delta \in C$, also $\sup(E \cap \delta) \in \mathrm{Drop}_E(C)$ nach Definition. Weil δ auch ein Häufungspunkt von E ist, folgt $\delta = \sup(E \cap \delta)$. $\square$

Korollar 3.19 *Es sei* $(C_\alpha : \alpha \in S)$ *eine Clubfolge in* λ *und* E *ein Club in* λ. *Dann ist auch* $(\mathrm{Drop}_E(C_\alpha) : \alpha \in S \cap \operatorname{acc} E)$ *eine Clubfolge in* λ.

Beweis: Da auch $\operatorname{acc} E$ ein Club in λ ist, ist zunächst $S \cap \operatorname{acc} E \subseteq \mathrm{Lim}$ stationär in λ. Nach dem vorherigen Lemma ist für alle $\alpha \in S \cap \operatorname{acc} E$ die Menge $\mathrm{Drop}_E(C_\alpha)$ ein Club in α. Insbesondere gilt dann $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \operatorname{otp} \mathrm{Drop}_E(C_\alpha)$. Wiederum aus dem vorherigen Lemma folgt schließlich auch noch die Ungleichung $\operatorname{otp} \mathrm{Drop}_E(C_\alpha) \leq \operatorname{otp} C_\alpha = \mathrm{cf}(\alpha)$. $\square$

Wir sind nun in der Lage, einen Satz über die Existenz von vorhersagenden Clubfolgen zu beweisen.

Satz 3.20 (Shelah) *Seien* κ, λ *regulär,* $\kappa^+ < \lambda$. *Dann existiert eine vorhersagende Clubfolge* $(C_\alpha : \alpha \in S^\lambda_\kappa)$.

Beweis: Es sei $(C_\alpha : \alpha \in S^\lambda_\kappa)$ eine Clubfolge. Wir zeigen: Es existiert ein Club $E \subseteq \lambda$, so daß die Folge $(\mathrm{Drop}_E(C_\alpha) : \alpha \in S^\lambda_\kappa \cap \operatorname{acc} E)$ eine vorhersagende Clubfolge ist.

Angenommen, dies ist nicht der Fall. Wir konstruieren eine absteigende Folge $(E_\xi : \xi < \kappa^+)$ von Clubs in λ wie folgt:

Es sei $E_0 := \lambda$. Ist E_ξ gewählt, so sei $C^\xi_\alpha := \mathrm{Drop}_{E_\xi}(C_\alpha)$ für alle $\alpha \in S^\lambda_\kappa$. Dann ist $(C^\xi_\alpha : \alpha \in S^\lambda_\kappa \cap \operatorname{acc} E_\xi)$ nach Korollar 3.19 wieder eine Clubfolge. Aufgrund unserer Annahme ist sie jedoch nicht vorhersagend, also existiert ein Club $E_{\xi+1}$, so daß für alle $\alpha \in S^\lambda_\kappa \cap \operatorname{acc} E_\xi$ gilt $C^\xi_\alpha \nsubseteq E_{\xi+1}$. Verkleinern wir den Club $E_{\xi+1}$, so bleibt diese Eigenschaft erhalten, also können wir o. B. d. A. $E_{\xi+1} \subseteq E_\xi$ annehmen.

Ist $\xi < \kappa^+$ eine Limeszahl, so setzen wir $E_\xi := \bigcap_{\zeta<\xi} E_\zeta$. Damit ist die Definition abgeschlossen.

Sei nun $E := \bigcap_{\xi<\kappa^+} E_\xi$. Dann ist E wiederum ein Club in λ. Wir können nun $\delta \in S^\lambda_\kappa \cap \operatorname{acc} E$ wählen. Dann ist $\delta \in \operatorname{acc} E_\xi$ für alle $\xi < \kappa^+$.

Als nächstes zeigen wir, daß die Folge $(C^\xi_\delta : \xi < \kappa^+)$ konstant ab einem $\zeta < \kappa^+$ ist: Ist $\beta \in C_\delta$, so ist $(\sup(E_\xi \cap \beta) : \xi < \kappa^+)$ eine monoton fallende Folge von Ordinalzahlen aus $C^\xi_\delta \subseteq \delta$, also existieren $\zeta_\beta < \kappa^+$ und $\delta_\beta < \delta$ mit

$$\forall \xi \in \kappa^+ \setminus \zeta_\beta \ \sup(E_\xi \cap \beta) = \delta_\beta.$$

Setzen wir $\zeta := \sup_{\beta \in C_\delta} \zeta_\beta < \kappa^+$, so gilt für alle $\xi \in \kappa^+ \setminus \zeta$

$$C^\xi_\delta = \operatorname{Drop}_{E_\xi}(C_\delta) = \{\sup(E_\xi \cap \beta) : \beta \in C_\delta\} = \{\delta_\beta : \beta \in C_\delta\}.$$

Da die letzte Menge gar nicht mehr von ξ abhängt, folgt also die Behauptung.

Insbesondere gilt also $C^{\zeta+1}_\delta = C^\zeta_\delta \not\subseteq E_{\zeta+1}$ nach Wahl von $E_{\zeta+1}$. Nach Lemma 3.18 gilt jedoch $C^{\zeta+1}_\delta = \operatorname{Drop}_{E_{\zeta+1}}(C_\delta) \subseteq E_{\zeta+1}$, ein Widerspruch der beweist, daß unsere Annahme falsch ist.

Also erhalten wir einen Club E in λ, so daß $(\operatorname{Drop}_E(C_\alpha) : \alpha \in S^\lambda_\kappa \cap \operatorname{acc} E)$ eine vorhersagende Clubfolge ist. Setzen wir diese Folge zu einer Clubfolge auf ganz S^λ_κ fort, so ist diese Clubfolge ebenfalls vorhersagend, also ist der Satz bewiesen. $\square$

Es ist möglich, stärkere Resultate dieser Form zu erhalten, z. B. läßt sich unter denselben Voraussetzungen eine Clubfolge $(C_\alpha : \alpha \in S^\lambda_\kappa)$ angeben, so daß für jeden Club E in λ die Menge $\{\alpha \in S^\lambda_\kappa : C_\alpha \subseteq E\}$ stationär in λ ist. S. Shelah hat einen ganzen Zoo von Variationen zu diesem Thema untersucht. Wir begnügen uns hier mit der einfachsten Variante, da sie ausreicht, um das nun folgende Resultat zu beweisen. Dieses Resultat steht in engem Zusammenhang mit dem von S. Shelah definierten Ideal $I[\lambda]$, auf dessen explizite Definition wir hier jedoch verzichten.

Der interessierte Leser findet in [9], Kapitel I den Hinweis, daß die Existenz eines stationären Menge $S \subseteq S^\lambda_\kappa$, die ein Element von $I[\lambda]$ ist, eine hinreichende Bedingung für die Existenz von Generatoren ist. Der Beweis, daß eine solche Menge existiert, gelang S. Shelah erst später und kann in [8] gefunden werden. Wir kombinieren die dort in 1.2 bis 1.5 erzielten Resultate zu dem folgenden Satz.

Dazu sei jedoch noch bemerkt, daß wir wiederum nicht das stärkstmögliche Resultat darstellen. Die Voraussetzung $\kappa^{++} < \lambda$ ließe sich noch zu $\kappa^+ < \lambda$

abschwächen, für uns reicht aber das folgende Ergebnis. Die Darstellung lehnt sich im wesentlichen an die Darstellung in [5] an.

Satz 3.21 (Shelah) *Seien κ, λ regulär, $\kappa^{++} < \lambda$. Dann existiert eine Folge $(c_\alpha : \alpha < \lambda)$ mit*

(i) $c_\alpha \subseteq \alpha$, $|c_\alpha| \leq \kappa$,

(ii) ist $\beta \in c_\alpha$, *so gilt* $c_\beta = c_\alpha \cap \beta$,

so daß die Menge

$$S = \{\alpha \in S^\lambda_\kappa : \sup c_\alpha = \alpha\}$$

stationär in λ *ist.*

Beweis: Es sei zunächst $\bar{C} = (C_\alpha : \alpha \in S^{\kappa^{++}}_\kappa)$ eine vorhersagende Clubfolge, die nach Satz 3.20 existiert. Als nächstes sei $\Theta > \lambda$ regulär. Wir wählen eine Approximationsfolge $\bar{M} = (M_\varepsilon : \varepsilon < \lambda)$ in $H(\Theta)$ mit $\kappa^{++} \cup \{\kappa^{++}, \lambda, \bar{C}\} \subseteq M_0$ und $|M_\varepsilon| < \lambda$ für alle $\varepsilon < \lambda$.

Ferner sei $(\gamma_\varepsilon : \varepsilon < \lambda)$ eine in λ kofinale Normalfolge, so daß wir für alle $\varepsilon < \lambda$ eine injektive Funktion

$$F_\varepsilon : M_\varepsilon \to (\gamma_{\varepsilon+1} \setminus \gamma_\varepsilon) \cap \mathrm{Succ}$$

wählen können. (Zum Beispiel kann man sich überlegen, daß die Definition $\gamma_\varepsilon := \sup(M_\varepsilon \cap \lambda)$ für $\varepsilon < \lambda$ eine solche Normalfolge liefert; die Existenz einer solchen Folge ist aber wegen $|M_\varepsilon| < \lambda$ für alle $\varepsilon < \lambda$ in jedem Falle trivial.)

Wir definieren ferner für alle $\varepsilon < \lambda$

$$P_\varepsilon := M_\varepsilon \cap \mathcal{P}(\varepsilon).$$

Ist $x \in \bigcup_{\varepsilon<\lambda} P_\varepsilon$, so sei

$$\varepsilon(x) := \min\{\varepsilon < \lambda : x \in P_\varepsilon\}.$$

Zusätzlich verabreden wir für $x, y \subseteq \lambda$ die Schreibweise $y \prec x$, falls y ein echtes Anfangsstück von x ist, d. h. falls es ein $\xi \in x$ mit $y = x \cap \xi$ gibt. Wir bemerken dazu, daß mit $x \in P_\varepsilon$ auch jedes Anfangsstück von x ein Element von P_ε ist. (Ist nämlich $x \in P_\varepsilon \subseteq M_\varepsilon$, so ist auch $\operatorname{otp} x \in M_\varepsilon$ und es gibt ein $f \in M_\varepsilon$, so daß $f : \operatorname{otp} x \to x$ der eindeutige Ordnungsisomorphismus ist. Ferner ist $x \in \mathcal{P}(\varepsilon)$, also gilt $\operatorname{otp} x \leq \sup x \leq \varepsilon \subseteq M_\varepsilon$. Ist nun $y \prec x$, so existiert ein $\gamma < \operatorname{otp} x \subseteq M_\varepsilon$ mit $y = f[\gamma]$. Mit $f, \gamma \in M_\varepsilon$ ist schließlich auch $y \in M_\varepsilon$.)

Insbesondere folgt also aus $y \prec x$ auch $\varepsilon(y) \leq \varepsilon(x)$. Eine Menge $x \in \bigcup_{\varepsilon<\lambda} P_\varepsilon$ nennen wir **minimal**, falls für alle $y \prec x$ gilt $\varepsilon(y) < \varepsilon(x)$.

Wir wollen nun die Folge $(c_\alpha : \alpha < \lambda)$ definieren. Dabei werden wir wie folgt vorgehen: Zunächst definieren wir c_α für alle Nachfolgerzahlen, also alle $\alpha \in \lambda \cap \mathrm{Succ}$. Da jede Menge c_α nur Nachfolgerzahlen enthalten wird, können wir jetzt bereits die gewünschten Eigenschaften nachweisen.

Um c_α auch für Limeszahlen zu definieren, zeigen wir dann, daß die Menge

$$S = \{\alpha \in S^\lambda_\kappa : \exists c \subseteq \alpha \cap \mathrm{Succ}\ (\sup c = \alpha, |c| \leq \kappa, \forall \beta \in c\ c_\beta = c \cap \beta)\}$$

stationär in λ ist. Dann reicht es, für $\alpha \in S$ die Menge c_α gemäß der Definition der Menge S zu wählen und sonst $c_\alpha = \emptyset$ zu setzen.

Sei also nun $\alpha \in \lambda \cap \mathrm{Succ}$. Falls kein $x \in \bigcup_{\varepsilon<\lambda} P_\varepsilon$ mit $|x| \leq \kappa$ und $\alpha = F_{\varepsilon(x)}(x)$ existiert, setzen wir $c_\alpha := \emptyset$.

Falls jedoch ein solches x existiert, so ist es aufgrund der Wahl der Funktionen F_ε eindeutig durch α bestimmt. Wir setzen dann

$$c_\alpha := \{F_{\varepsilon(y)}(y) : y \prec x, \varepsilon(y) < \varepsilon(x), y \text{ minimal}\}.$$

Ebenfalls nach Wahl der Funktionen F_ε ist $c_\alpha \subseteq \mathrm{Succ}$. Wir zeigen nun die Eigenschaften (i) und (ii) für alle Nachfolgerzahlen $\alpha < \lambda$.

Sei dazu $\alpha \in \lambda \cap \mathrm{Succ}$. Ist $c_\alpha = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen. Sei also ferner $x \in \bigcup_{\varepsilon<\lambda} P_\varepsilon$ mit $|x| \leq \kappa$ und $\alpha = F_{\varepsilon(x)}(x)$.

(i) Ist $y \prec x$ mit $\varepsilon(y) < \varepsilon(x)$, so gilt $F_{\varepsilon(y)}(y) < \gamma_{\varepsilon(y)+1} \leq \gamma_{\varepsilon(x)} \leq F_{\varepsilon(x)}(x) = \alpha$, also gilt $c_\alpha \subseteq \alpha$.

Aus $|x| \leq \kappa$ folgt $|c_\alpha| \leq \kappa$, da jedes Element von c_α durch ein echtes Anfangsstück von x gegeben wird.

(ii) Es sei $\beta \in c_\alpha$. Wir haben $c_\beta = c_\alpha \cap \beta$ zu zeigen. Zunächst existiert nach Definition von c_α ein minimales $y \prec x$ mit $\varepsilon(y) < \varepsilon(x)$ und $\beta = F_{\varepsilon(y)}(y)$.

Ist $\gamma \in c_\beta$, so existiert $z \prec y$ minimal mit $\varepsilon(z) < \varepsilon(y)$ und $\gamma = F_{\varepsilon(z)}(z)$. Es gilt dann auch $z \prec x$, $\varepsilon(z) < \varepsilon(x)$ und die Minimalität von z bleibt natürlich erhalten. Also gilt auch $\gamma \in c_\alpha$. Sicher gilt auch $\gamma < \beta$, denn es ist $c_\beta \subseteq \beta$ nach (i).

Ist umgekehrt $\gamma \in c_\alpha \cap \beta$, so existiert ein minimales $z \prec x$ mit $\varepsilon(z) < \varepsilon(x)$ und $\gamma = F_{\varepsilon(z)}(z)$. Wäre $z = y$, so wäre $\beta = \gamma$. Wäre $y \prec z$, so wäre aufgrund der Minimalität von z auch $\varepsilon(y) < \varepsilon(z)$ und damit ergibt sich $\beta < \gamma$ mit demselben Argument wie oben. Also muß $z \prec y$ gelten. Da auch y minimal ist, folgt $\varepsilon(z) < \varepsilon(y)$, d. h. es gilt $\gamma \in c_\beta$, was zu zeigen war.

Damit sind die Mengen c_α für Nachfolgerzahlen also zufriedenstellend definiert. Wir zeigen nun, daß wir die Folge an genügend vielen Stellen $\alpha < \lambda$ mit $\mathrm{cf}(\alpha) = \kappa$ geeignet fortsetzen können. Dazu zeigen wir zunächst, daß die Menge

$$T = \{\alpha \in S^\lambda_\kappa : \exists x \subseteq \alpha(\sup x = \alpha, \operatorname{otp} x = \kappa, \forall y \prec x \; \exists \varepsilon < \alpha \; y \in P_\varepsilon)\}$$

stationär in λ ist. Sei dazu E ein Club in λ.

Wir wählen eine Approximationsfolge $(N_\xi : \xi < \kappa^{++})$ mit $|N_\xi| = \kappa^{++}$ für alle $\xi < \kappa^{++}$ und $\kappa^{++} \cup \{\kappa^{++}, \lambda, E, \bar{C}, \bar{M}\} \subseteq N_0$.

Es sei $\theta_\xi := \sup(N_\xi \cap \lambda) < \lambda$ für alle $\xi < \kappa^{++}$. Dann ist $(\theta_\xi : \xi < \kappa^{++})$ eine Normalfolge nach Lemma 3.14.

Sei $\theta := \sup\{\theta_\xi : \xi < \kappa^{++}\} < \lambda$. Dann sind $\kappa^{++}, \theta \in M_{\theta+1}$, also können wir $f \in M_{\theta+1}$ wählen, so daß $f : \kappa^{++} \to \theta$ eine in θ kofinale Normalfunktion ist. Setzen wir

$$D := \{\xi < \kappa^{++} : f(\xi) = \theta_\xi\},$$

so ist D ein Club in κ^{++}. Nach Wahl der vorhersagenden Clubfolge $\bar{C}$ existiert ein $\delta < \kappa^{++}$ mit $\mathrm{cf}(\delta) = \kappa$, so daß $C_\delta \subseteq D$ ein Club in δ mit Ordnungstyp κ ist.

Wegen $\lambda, E \in N_\delta$ gilt $\theta_\delta = \sup(N_\delta \cap \lambda) \in E$ nach Lemma 3.9. Wir zeigen nun, daß auch $\theta_\delta \in T$ gilt. Sicher ist $\mathrm{cf}(\theta_\delta) = \mathrm{cf}(\delta) = \kappa$.

Setze nun $x := \{\theta_\xi : \xi \in C_\delta\}$. Offensichtlich gilt $\sup x = \theta_\delta$ und $\operatorname{otp} x = \kappa$. Es bleibt zu zeigen, daß für jedes echte Anfangsstück $y \prec x$ gilt $\varepsilon(y) < \theta_\delta$, d. h. daß ein $\varepsilon < \theta_\delta$ existiert mit $y \in P_\varepsilon$.

Um dies zu zeigen, sei also $y \prec x$. Dann existiert ein $\zeta < \delta < \kappa^{++}$, so daß

$$y = \{\theta_\xi : \xi \in C_\delta \cap \zeta\} = \{f(\xi) : \xi \in C_\delta \cap \zeta\},$$

wobei die Gleichheit der Mengen aus der Definition von D und der Wahl von δ mit $C_\delta \subseteq D$ folgt.

Mit Hilfe von $\zeta, \delta, \bar{C}, f \in M_{\theta+1}$ erhält man auch $y \in M_{\theta+1}$. Außerdem gilt wegen $(N_\xi : \xi < \zeta), \lambda \in N_{\zeta+1}$ auch $(\theta_\xi : \xi < \zeta) \in N_{\zeta+1}$ und damit erhält man wie eben $y \in N_{\zeta+1}$. Mit $\lambda, \bar{M} \in N_0 \subseteq N_{\zeta+1}$ folgt also

$$N_{\zeta+1} \models \exists \varepsilon < \lambda \; (y \in \bar{M}(\varepsilon) \wedge y \subseteq \varepsilon).$$

Wählen wir also ein $\varepsilon \in N_{\zeta+1} \cap \lambda$ mit $y \in M_\varepsilon$ und $y \subseteq \varepsilon$, d. h. es ist $y \in P_\varepsilon$, so können wir aus $\zeta < \delta$ schließen $\varepsilon < \theta_{\zeta+1} < \theta_\delta$, also $\varepsilon(y) < \theta_\delta$, was zu zeigen war. Wir erhalten also, daß T stationär in λ ist.

Wir beenden den Beweis, indem wir noch zeigen, daß auch die Menge

$$S = \{\alpha \in S^\lambda_\kappa : \exists c \subseteq \alpha \cap \mathrm{Succ}\; (\sup c = \alpha, |c| \leq \kappa, \forall \beta \in c \; c_\beta = c \cap \beta)\}$$

stationär in λ ist. Dazu sei wiederum E ein Club in λ. Dann ist auch

$$E' = E \cap \{\alpha < \lambda : \gamma_\alpha = \alpha\}$$

ein Club in λ und wir können ein $\alpha \in T \cap E'$ sowie eine Menge $x \subseteq \alpha$ wie in der Definition von T wählen. Um $\alpha \in S$ zu zeigen, setzen wir

$$c := \{F_{\varepsilon(y)}(y) : y \prec x, y \text{ minimal}\}.$$

Offensichtlich gilt $c \subseteq \mathrm{Succ}$ und $|c| \leq \kappa$. Um $c \subseteq \alpha$ zu zeigen, bemerken wir, daß nach Wahl von x für alle $y \prec x$ die Ungleichung $\varepsilon(y) < \alpha$ gilt, folglich erhalten wir $F_{\varepsilon(y)}(y) < \gamma_{\varepsilon(y)+1} \leq \gamma_\alpha = \alpha$.

Um $\sup c = \alpha$ zu beweisen, stellen wir fest, daß $\varepsilon(y) \leq \gamma_{\varepsilon(y)} < F_{\varepsilon(y)}(y)$ für alle $y \prec x$ gilt. Daher können wir uns darauf beschränken, zu zeigen, daß die Menge $\{\varepsilon(y) : y \prec x, y \text{ minimal}\}$ unbeschränkt in α ist.

Da für $y, y' \in \bigcup_{\varepsilon<\lambda} P_\varepsilon$ mit $y \prec y'$ stets $\varepsilon(y) \leq \varepsilon(y')$ gilt, sieht man leicht, daß

$$\{\varepsilon(y) : y \prec x\} = \{\varepsilon(y) : y \prec x, y \text{ minimal}\}$$

gilt. Also reicht es, die Unbeschränktheit von $\{\varepsilon(y) : y \prec x\}$ nachzuweisen.

Ist nun $\varepsilon < \alpha$, so existiert wegen $\sup x = \alpha$ ein echtes Anfangsstück $y \prec x$ mit $y \not\subseteq \varepsilon$, d. h. es ist $y \notin P_\varepsilon = M_\varepsilon \cap \mathcal{P}(\varepsilon)$, also $\varepsilon(y) > \varepsilon$.

Die letzte Aussage, nämlich $\forall \beta \in c \; c_\beta = c \cap \beta$ folgt wortwörtlich wie im obigen Beweis der entsprechenden Aussage für c_α anstelle von c. $\square$

Kapitel 4

Generatoren

In diesem Kapitel untersuchen wir vor allem das Verhältnis der Ideale $J_{<\lambda}(\bar{H})$ untereinander. Es wird sich herausstellen, daß für progressive Familien $\bar{H}$ dieses Verhältnis so einfach wie möglich ist. Ist nämlich $J_{<\lambda}(\bar{H}) \subsetneqq J_{<\lambda^+}(\bar{H})$, also $\lambda \in \mathrm{p}\mathfrak{b}(\bar{H})$, so existiert eine Menge $B \in J_{<\lambda^+}(\bar{H})$, die dieses Ideal über $J_{<\lambda}(\bar{H})$ erzeugt, d. h. es gilt $J_{<\lambda^+}(\bar{H}) = J_{<\lambda}(\bar{H})[B]$.

4.1 Generatoren und stabile Ideale

Wir beginnen mit der oben angedeuteten Definition der Generatoren und gehen zunächst auf den Zusammenhang zum Begriff des stabilen Ideals ein.

Definition 4.1 Ist $\bar{H}$ eine Familie von Halbordnungen und λ eine Kardinalzahl, so nennen wir eine Menge $B \in J_{<\lambda^+}(\bar{H})$ einen **Generator** (von $J_{<\lambda^+}(\bar{H})$), falls gilt

$$J_{<\lambda^+}(\bar{H}) = J_{<\lambda}(\bar{H})[B],$$

d. h. für alle $C \in J_{<\lambda^+}(\bar{H})$ gilt $C \setminus B \in J_{<\lambda}(\bar{H})$.

Wir hatten $J_{<\lambda}(\bar{H})$ als das kleinste λ-mächtige Ideal für $\bar{H}$ definiert, falls ein solches Ideal existiert. Die Existenz von Generatoren liefert ein weiteres minimales Ideal, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 4.2 *Es sei $\lambda \in \mathrm{p}\mathfrak{b}(\bar{H})$ und B ein Generator von $J_{<\lambda^+}(\bar{H})$. Dann ist*

$$J_{<\lambda}(\bar{H}) \restriction B = \bigcap \{I : \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) = \lambda, I \ \textit{stabil}\}.$$

Folglich ist $J_{<\lambda}(\bar{H}) \restriction B$ das kleinste stabile Ideal I mit $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) = \lambda$.

Beweis: Es ist $J_{<\lambda}(\bar{H}) \subsetneqq J_{<\lambda^+}(\bar{H})$ nach Korollar 2.19 (iv). Also gilt sicher $B \in J_{<\lambda^+}(\bar{H}) \setminus J_{<\lambda}(\bar{H})$ und nach Lemma 2.20 ist $J_{<\lambda}(\bar{H}) \restriction B$ ein stabiles Ideal mit $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J_{<\lambda}(\bar{H}) \restriction B) = \lambda$. Insbesondere gilt damit die Inklusion „$\supseteq$".

„$\subseteq$" Sei I ein stabiles Ideal mit $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) = \lambda$. Nach Korollar 2.19 (iii) gilt zunächst $J_{<\lambda}(\bar{H}) \subseteq I$. Es bleibt also noch $A \setminus B \in I$ zu zeigen. Angenommen, es ist $A \setminus B \notin I$. Dann ist $I[B] \supseteq I$ ein echtes Ideal und aufgrund der Stabilität von I gilt auch $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I[B]) = \lambda$. Andererseits ist jedoch $J_{<\lambda^+}(\bar{H}) = J_{<\lambda}(\bar{H})[B] \subseteq I[B]$, also müßte $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I[B]) \geq \lambda^+$ wieder nach Korollar 2.19 gelten, ein Widerspruch. □

Im Rest dieses Abschnitts wollen wir noch zeigen, daß die Existenz eines kleinsten stabilen Ideals auch umgekehrt die Existenz eines Generators impliziert. Zusammen mit dem anschließenden Lemma 4.5 liefert dies eine Alternative für einen Beweis der Existenz von Generatoren.

Wir beginnen mit einem vorbereitenden Lemma. Einen Spezialfall dieses Lemmas haben wir schon in Lemma 2.20 betrachtet.

Lemma 4.3 *Sei $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) = \lambda$. Dann sind äquivalent:*

(i) I ist stabil.

(ii) $I \cup J_{<\lambda^+}(\bar{H})$ erzeugt kein echtes Ideal.

(iii) Es gibt ein $B \in J_{<\lambda^+}(\bar{H})$ mit $B =_I A$.

Beweis: „(i) $\Rightarrow$ (ii)" Angenommen, es gibt ein echtes Ideal $J \supseteq I \cup J_{<\lambda^+}(\bar{H})$. Dann ist wegen $J \supseteq I$ und der Stabilität von I auch $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) = \lambda$. Dies widerspricht wegen Korollar 2.19 (iii) jedoch $J_{<\lambda^+}(\bar{H}) \subseteq J$.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Gilt (ii), so existieren $B \in J_{<\lambda^+}(\bar{H})$ und $C \in I$ mit $A = B \cup C$, also ist $A \setminus B \subseteq C \in I$, d. h. es gilt $A \setminus B \in I$ und somit $B =_I A$.

„(iii) $\Rightarrow$ (i)" Sei $B \in J_{<\lambda^+}(\bar{H})$ mit $B =_I A$. Um zu zeigen, daß I stabil ist, sei $J \supseteq I$ ein echtes Ideal. Angenommen, es ist $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) > \lambda$. Nach Korollar 2.19 (iii) gilt dann $B \in J_{<\lambda^+}(\bar{H}) \subseteq J$, also ist $A =_I B \in J$, ein Widerspruch. □

Wie bereits erwähnt, ist Lemma 2.20 ein Spezialfall dieser Aussage: Ist nämlich $B \in J_{<\lambda^+}(\bar{H}) \setminus J_{<\lambda}(\bar{H})$, so ist $I := J_{<\lambda}(\bar{H}) \restriction B$ ein echtes Ideal mit $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) = \lambda$ und $B =_I A$. Also gilt die Eigenschaft (iii) dieses Lemmas.

Lemma 4.4 *Es sei $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) = \lambda$ und I sei das kleinste stabile Ideal mit dieser Eigenschaft. Dann besitzt $J_{<\lambda^+}(\bar{H})$ einen Generator.*

Beweis: Nach obigem Lemma existiert ein $B \in J_{<\lambda^+}(\bar{H})$ mit $B =_I A$, d. h. es gilt $A \setminus B \in I$. Wir zeigen, daß dann B ein Generator ist, also die Gleichung $J_{<\lambda^+}(\bar{H}) = J_{<\lambda}(\bar{H})[B]$ gilt. Die Inklusion „$\supseteq$“ ist klar.

„$\subseteq$“ Wir nehmen an, daß dies nicht gilt. Dann ist $J_{<\lambda}(\bar{H})[B]$ sicher ein echtes Ideal. Daher können wir Korollar 2.19 (iii) zweimal anwenden und erhalten $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J_{<\lambda}(\bar{H})[B]) = \lambda$. Mit Hilfe von Satz 2.16 können wir ein stabiles Ideal $J \supseteq J_{<\lambda}(\bar{H})[B]$ mit $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) = \lambda$ wählen. Nach Voraussetzung ist $I \subseteq J$, also gilt $A \setminus B \in I \subseteq J$. Andererseits ist jedoch $B \in J_{<\lambda}(\bar{H})[B] \subseteq J$, also insgesamt $A \in J$, ein Widerspruch. □

Das folgende Lemma werden wir nicht verwenden. Es zeigt aber, daß ein alternativer Beweisansatz für die Existenz der Generatoren so aussehen kann, daß man die Eigenschaft (ii) dieses Lemmas nachweist.

Lemma 4.5 *Es sei $\bar{H}$ progressiv und $\lambda \in \mathrm{p}\mathfrak{b}(\bar{H})$. Dann sind äquivalent:*

(i) Es gibt ein kleinstes stabiles Ideal J für $\bar{H}$ mit $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) = \lambda$.

(ii) Ist $\Gamma \subseteq \{I : I \text{ ist stabiles Ideal für } \bar{H} \text{ mit } \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) = \lambda\}$ nichtleer, so ist auch $\bigcap \Gamma$ stabil für $\bar{H}$.

Beweis: „(i) $\Rightarrow$ (ii)“ Es sei J wie in (i) und Γ wie in (ii). Für alle $I \in \Gamma$ gilt $J \subseteq I$ nach Wahl von J. Also ist auch $J \subseteq \bigcap \Gamma$. Daher ist $\bigcap \Gamma$ als Oberideal eines stabilen Ideals offensichtlich auch stabil.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)“ Setze $\Gamma := \{I : I \text{ ist stabiles Ideal für } \bar{H} \text{ mit } \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) = \lambda\}$. Wegen $\lambda \in \mathrm{p}\mathfrak{b}(\bar{H})$ und nach Satz 2.16 ist $\Gamma \neq \emptyset$. Also ist $J := \bigcap \Gamma$ nach (ii) stabil und aus Korollar 2.17 (i) folgt $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) = \lambda$. Daher ist J offensichtlich das kleinste Ideal mit dieser Eigenschaft. □

4.2 Universelle Folgen

Wir definieren zunächst die sogenannten universellen Folgen und zeigen, daß eine solche Folge stets existiert. Als Korollar erhalten wir anschließend ein Kriterium für die Stabilität eines Ideals I, ist nämlich $\lambda = \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$ und I ein stabiles Ideal, so existiert eine Folge $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ von Elementen von $\prod \bar{H}$, die für alle $J \supseteq I$ unbeschränkt bzgl. $<_J$ ist. Wir beginnen aber zunächst mit einer allgemeineren Definition.

Definition 4.6 Es sei $\prod \bar{H}/I$ ein reduziertes Produkt von Halbordnungen und $\lambda = \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$. Eine Folge $\bar{f} = (f_\alpha : \alpha < \lambda)$ heißt **universell** für $\prod \bar{H}/I$, falls gilt:

(i) $\bar{f}$ ist $<_I$-wachsend.

(ii) Ist $J \supseteq I$ ein echtes Ideal mit $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) = \lambda$, so ist $\bar{f}$ in $\prod \bar{H}$ unbeschränkt bzgl. $<_J$.

Wir beweisen nun die Existenz einer solchen universellen Folge. Ähnliche Resultate findet man in [1], Lemma 7.3 oder in [10], Lemma 2.8.

Satz 4.7 *Sei $\bar{H}$ progressiv und $|A|^+ < \lambda = \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$. Dann existiert eine universelle Folge für $\prod \bar{H}/I$.*

Beweis: Für $\xi \in \mathrm{ON}$ wählen wir solange wie möglich Folgen $(f^\xi_\alpha : \alpha < \lambda)$ von Elementen von $\prod \bar{H}$ und Ideale $J_\xi \supseteq I$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J_\xi) = \lambda$.

(ii) $(f^\xi_\alpha : \alpha < \lambda)$ ist $<_I$-wachsend.

(iii) $(f^\xi_\alpha : \alpha < \lambda)$ ist $<_{J_\xi}$-unbeschränkt.

(iv) $\forall \alpha < \lambda \; f^\xi_\alpha <_{J_{\xi+1}} f^{\xi+1}_0$.

(v) $\forall \zeta < \xi \; \forall \alpha < \lambda \; f^\zeta_\alpha < f^\xi_\alpha$.

Wir zeigen zunächst, daß es nicht möglich ist, diese Wahl für alle $\xi < |A|^+$ durchzuführen. Angenommen, wir haben für alle $\xi < |A|^+$ derartige Folgen

$(f^\xi_\alpha : \alpha < \lambda)$ und Ideale J_ξ definiert. Da $\prod \bar{H}/I$ eine λ-gerichtete Halbordnung ist und $|A|^+ < \lambda$ gilt, besitzt $\{f^\xi_0 : \xi < |A|^+\}$ eine $<_I$-obere Schranke g in $\prod \bar{H}$. Wegen (iii) existiert zu jedem $\xi < |A|^+$ ein $\alpha(\xi) < \lambda$ mit $f^\xi_{\alpha(\xi)} \not<_{J_\xi} g$, also gilt wegen (ii) und $I \subseteq J_\xi$

$$\forall \alpha \in \lambda \setminus \alpha(\xi)\ f^\xi_\alpha \not<_{J_\xi} g.$$

Wir setzen nun $\alpha^* := \sup\{\alpha(\xi) : \xi < |A|^+\} < \lambda$ und erhalten für alle $\xi < |A|^+$

$$C_\xi := C(f^\xi_{\alpha^*}, g) \notin J_\xi.$$

Nach (iv) gilt andererseits $f^\xi_{\alpha^*} <_{J_{\xi+1}} f^{\xi+1}_0 <_I g$, d. h. es ist $C_\xi \in J_{\xi+1}$. Nach (v) gilt für $\zeta < \xi < |A|^+$ insbesondere $f^\zeta_{\alpha^*} < f^\xi_{\alpha^*}$, also $C_\zeta \subseteq C_\xi$, d. h. die Folge $(C_\xi : \xi < |A|^+)$ ist eine aufsteigende Folge von Teilmengen von A. Für alle $\xi < |A|^+$ gilt jedoch nach obigem $C_\xi \in J_{\xi+1}$, $C_{\xi+1} \notin J_{\xi+1}$, d. h. es ist $C_\xi \subsetneqq C_{\xi+1}$, ein Widerspruch, der beweist, daß die Definition bei einem $\xi < |A|^+$ abbricht.

Andererseits können wir sicher $(f^0_\alpha : \alpha < \lambda)$ und J_0 geeignet wählen; dazu reicht es $J_0 := I$ zu setzen und eine Folge zu wählen, die bzgl. $<_I$ wachsend und unbeschränkt ist. Eine solche Folge existiert nach Lemma 1.9.

Ferner bricht die Definition nicht an einer Limeszahl $\xi < |A|^+$ ab. Ist nämlich $\xi < |A|^+$ eine Limeszahl und sind für alle $\zeta < \xi$ entsprechende Folgen und Ideale definiert, so setzen wir wieder $J_\xi := I$. Wir definieren durch Rekursion über $\alpha < \lambda$ die Folgen $(g_\alpha : \alpha < \lambda)$ und $(f^\xi_\alpha : \alpha < \lambda)$ von Elementen von $\prod \bar{H}$. Sind diese für $\beta < \alpha$ bereits definiert, so können wir $g_\alpha \in \prod \bar{H}$ wählen mit $f^0_\alpha <_I g_\alpha$ und $f^\xi_\beta <_I g_\alpha$ für alle $\beta < \alpha$, denn $\prod \bar{H}/I$ ist λ-gerichtet. Da $\bar{H}$ progressiv ist, ist H_a für alle $a \in A$ eine $|A|^+$-gerichtete Halbordnung. Wegen $\xi < |A|^+$ finden wir also $f^\xi_\alpha \in \prod \bar{H}$ mit $g_\alpha < f^\xi_\alpha$ und $f^\zeta_\alpha < f^\xi_\alpha$ für alle $\zeta < \xi$.

Wir zeigen nun, daß die Bedingungen erfüllt sind. Wegen $f^\xi_\beta <_I g_\alpha < f^\xi_\alpha$ gilt (ii). Wäre $h \in \prod \bar{H}$ eine obere Schranke bzgl. $J_\xi = I$, so würden wir $f^0_\alpha <_I g_\alpha < f^\xi_\alpha <_I h$ für alle $\alpha < \lambda$ erhalten, also wäre auch $(f^0_\alpha : \alpha < \lambda)$ beschränkt bzgl. $<_I$; dieser Widerspruch zeigt (iii). Für (iv) ist nichts zu zeigen. Ist $\zeta < \xi$, so gilt $f^\zeta_\alpha < f^\xi_\alpha$ nach Konstruktion, also ist auch (v) erfüllt.

Unsere Definition bricht also bei einem $\xi < |A|^+$ ab. Wir zeigen schließlich, daß dann $(f^\xi_\alpha : \alpha < \lambda)$ die gesuchte universelle Folge ist. Angenommen, dies ist nicht der Fall. Da die Folge $<_I$-wachsend ist, gilt also Eigenschaft (ii) aus Definition 4.6 nicht, d. h. es gibt ein Ideal $J \supseteq I$ mit $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) = \lambda$ sowie eine $<_J$-obere Schranke $h \in \prod \bar{H}$ von $(f_\alpha^\xi : \alpha < \lambda)$. Damit läßt sich die Konstruktion jedoch wie folgt fortsetzen. Setze $J_{\xi+1} := J$ und wähle $f_0^{\xi+1} \in \prod \bar{H}$ mit $h < f_0^{\xi+1}$ und $f_0^\xi < f_0^{\xi+1}$. Wegen $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) = \lambda$ existiert eine Folge $(h_\alpha : \alpha < \lambda)$, die bzgl. $<_J$ unbeschränkt ist. Wie eben definieren wir rekursiv über $\alpha < \lambda$ Folgen $(g_\alpha : \alpha < \lambda)$ und $(f_\alpha^{\xi+1} : \alpha < \lambda)$. Ist dies für $\beta < \alpha$ bereits durchgeführt, so wählen wir $g_\alpha \in \prod \bar{H}$ mit $h_\alpha <_I g_\alpha$ und $f_\beta^{\xi+1} <_I g_\alpha$ für alle $\beta < \alpha$. Ferner können wir dann $f_\alpha^{\xi+1} \in \prod \bar{H}$ wählen mit $g_\alpha < f_\alpha^{\xi+1}$ und $f_\alpha^\xi < f_\alpha^{\xi+1}$. Wie oben erhalten wir die Eigenschaften (ii), (iii) und (v). Die Eigenschaft (iv) gilt, da für $\alpha < \lambda$ gilt $f_\alpha^\xi <_J h < f_0^{\xi+1}$. □

Als Korollar erhalten wir das bereits angekündigte Kriterium für die Stabilität eines Ideals I.

Korollar 4.8 *Es sei $\bar{H}$ eine progressive Familie von Halbordnungen, I ein Ideal auf A und $\lambda = \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) > |A|^+$. Dann sind äquivalent:*

(i) I ist stabil für $\bar{H}$.

(ii) Es gibt eine $<_I$-wachsende Folge $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$, die für jedes echte Ideal $J \supseteq I$ unbeschränkt bzgl. $<_J$ ist.

Beweis: „(i) $\Rightarrow$ (ii)“ folgt direkt aus dem obigen Satz.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)“ Sei $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ eine Folge wie in (ii). Ist $J \supseteq I$ ein echtes Ideal, so ist $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) \geq \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) = \lambda$ nach Lemma 1.25.

$\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) \leq \lambda$ wird gerade durch die Folge $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ bestätigt. □

4.3 Die Existenz von Generatoren

Die im letzten Abschnitt bewiesene Existenz von universellen Folgen wollen wir nun verwenden, um die Existenz von Generatoren zu beweisen. Wir beginnen mit einer schwächeren Variante des Generatorenbegriffs, mit deren Hilfe wir den Spezialfall $2^{|A|} < \lambda$ lösen können. Anschließend werden wir dieses Resultat mit Hilfe der kombinatorischen Resultate des letzten Kapitels verallgemeinern.

Lemma 4.9 *Es sei $\bar{H} = (H_a : a \in A)$ eine progressive Familie von Halbordnungen und $|A|^+ < \lambda$. Dann existiert eine Folge $(C_\alpha : \alpha < \lambda)$ von Elementen von $J_{<\lambda^+}(\bar{H})$, so daß gilt:*

(i) Ist $\alpha < \beta < \lambda$, so gilt $C_\alpha \subseteq_{J_{<\lambda}(\bar{H})} C_\beta$.

(ii) $J_{<\lambda^+}(\bar{H})$ ist das von $J_{<\lambda}(\bar{H}) \cup \{C_\alpha : \alpha < \lambda\}$ erzeugte Ideal.

Beweis: O. B. d. A. gelte $J_{<\lambda}(\bar{H}) \subsetneqq J_{<\lambda^+}(\bar{H}) \subsetneqq \mathcal{P}(A)$, denn sonst können wir $C_\alpha = \emptyset$ bzw. $C_\alpha = A$ für alle $\alpha < \lambda$ wählen. Es folgt $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J_{<\lambda}(\bar{H})) = \lambda$ nach Korollar 2.19 (iv).

Nach Satz 4.7 können wir eine Folge $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ wählen, die universell für $\prod \bar{H}/J_{<\lambda}(\bar{H})$ ist. Ferner existiert nach Korollar 2.19 (i) bzgl. $<_{J_{<\lambda^+}(\bar{H})}$ eine obere Schranke $g \in \prod \bar{H}$ von $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$. Setzt man $C_\alpha := C(f_\alpha, g)$ für $\alpha < \lambda$, so erhält man eine $\subseteq_{J_{<\lambda}(\bar{H})}$-wachsende Folge von Elementen von $J_{<\lambda^+}(\bar{H})$.

Wir zeigen nun, daß $J_{<\lambda^+}(\bar{H})$ das von $J_{<\lambda}(\bar{H}) \cup \{C_\alpha : \alpha < \lambda\}$ erzeugte Ideal, welches wir J nennen wollen, ist. Sicher gilt $J \subseteq J_{<\lambda^+}(\bar{H})$, denn für alle $\alpha < \lambda$ ist $C_\alpha \in J_{<\lambda^+}(\bar{H})$.

Sei umgekehrt $B \in J_{<\lambda^+}(\bar{H})$. Angenommen, es gilt $B \notin J$, also $B \notin J_{<\lambda}(\bar{H})$. Dann ist $J_{<\lambda}(\bar{H}) \restriction B$ nach Lemma 2.20 ein stabiles Ideal. Wegen $J_{<\lambda}(\bar{H}) \subseteq J$ gilt auch $J_{<\lambda}(\bar{H}) \restriction B \subseteq J \restriction B$ und somit folgt $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}, <_{J \restriction B}) = \lambda$. Nach Wahl der Folge $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ wäre diese also unbeschränkt bzgl. $<_{J \restriction B}$.

Für $\alpha < \lambda$ gilt jedoch $C(f_\alpha, g) = C_\alpha \in J$, d. h. $f_\alpha <_J g$, also ist g bzgl. $<_J$ und damit erst recht bzgl. $<_{J \restriction B}$ eine obere Schranke. □

Für den speziellen Fall $2^{|A|} < \lambda$ ergibt sich hieraus sofort die Existenz eines Generators von $J_{<\lambda^+}(\bar{H})$. Dies liegt schlichtweg daran, daß $|J_{<\lambda^+}(\bar{H})| \leq 2^{|A|}$ gilt. Damit muß die Folge $(C_\alpha : \alpha < \lambda)$ aus dem vorigen Lemma ab einem $\alpha^* < \lambda$ modulo $J_{<\lambda}(\bar{H})$ konstant sein. Die entsprechende Menge C_{α^*} ist dann der gesuchte Generator.

Der Beweis für den allgemeinen Fall wird ähnlich verlaufen, nur werden wir ein anderes Argument dafür finden, daß die Folge $(C_\alpha : \alpha < \lambda)$ konstant wird.

Korollar 4.10 *Sei $2^{|A|} < \lambda$. Dann existiert ein Generator von $J_{<\lambda^+}(\bar{H})$.*

Beweis: Es sei $(C_\alpha : \alpha < \lambda)$ eine Folge von Elementen von $J_{<\lambda^+}(\bar{H})$ wie im vorherigen Lemma. Dann existiert zu jedem $B \in J_{<\lambda^+}(\bar{H})$ ein $\alpha(B) < \lambda$ mit $B \subseteq_{J_{<\lambda}(\bar{H})} C_{\alpha(B)}$. Wegen $J_{<\lambda^+}(\bar{H}) \subseteq \mathcal{P}(A)$ ist $|J_{<\lambda^+}(\bar{H})| < \lambda$; setzt man also $\alpha^* := \sup\{\alpha(B) : B \in J_{<\lambda^+}(\bar{H})\} < \lambda$, so ist C_{α^*} der gesuchte Generator. □

Die Idee, die wir verfolgen werden, um diesen Beweis zu verallgemeinern, ist die folgende: Wir wählen die $<_{J_{<\lambda}(\bar{H})}$-wachsende Folge $\bar{f} = (f_\alpha : \alpha < \lambda)$ derart, daß für jede Funktion $g \in \prod \bar{H}$ – also auch für die im Beweis von Lemma 4.9 gewählte $<_{J_{<\lambda^+}(\bar{H})}$-Schranke – die Folge der Mengen $(C(f_\alpha, g) : \alpha < \lambda)$ ab einem gewissen α^* modulo $J_{<\lambda}(\bar{H})$ konstant ist. Dazu müssen wir die Folge $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ geeignet wählen. Dies wird uns durch die kombinatorischen Hilfsmittel des letzten Kapitels ermöglicht. Wir beginnen mit den nötigen Definitionen.

Definition 4.11 Wir nennen eine Folge $\bar{c} = (c_\alpha : \alpha < \lambda)$ mit $c_\alpha \subseteq \alpha$ für alle $\alpha < \lambda$ im folgenden eine **Bedingung** (der Länge in λ). Eine Folge $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ von Elementen von $\prod \bar{H}$ **erfüllt** die Bedingung $\bar{c}$, falls für alle $\alpha < \lambda$ und $\beta \in c_\alpha$ gilt $f_\beta < f_\alpha$.

Der erste Schritt besteht darin, zu zeigen, daß Bedingungen, die nicht „zu groß“ sind, erfüllt werden können, indem man die Elemente einer gegebenen Folge evtl. vergrößert. Dadurch erhält man bei einer gegebenen unbeschränkten Folge z. B. wieder einer unbeschränkte Folge usw.

Lemma 4.12 *Es sei $\bar{H}$ eine Familie von Halbordnungen mit $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) = \lambda$ und $\bar{f} = (f_\alpha : \alpha < \lambda)$ eine $<_I$-wachsende Folge von Elementen von $\prod \bar{H}$. Ferner sei $\bar{c}$ eine Bedingung mit $|c_\alpha| < \min\{\mathfrak{b}(H_a) : a \in A\}$ für alle $\alpha < \lambda$.*

Dann existiert eine ebenfalls $<_I$-wachsende Folge $\bar{g} = (g_\alpha : \alpha < \lambda)$, die die Bedingung $\bar{c}$ erfüllt, so daß für alle $\alpha < \lambda$ gilt $f_\alpha <_I g_\alpha$.

Beweis: Wir definieren $(g_\alpha : \alpha < \lambda)$ rekursiv. Sei $(g_\beta : \beta < \alpha)$ bereits geeignet definiert. Da $\prod \bar{H}/I$ eine λ-gerichtete Halbordnung ist, existiert bzgl. $<_I$ eine obere Schranke $h \in \prod \bar{H}$ von $\{g_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{f_\alpha\}$. Nun können wir für $a \in A$ den Wert $g_\alpha(a) \in H_a$ als $<_a$-Schranke von $\{h(a)\} \cup \{g_\beta(a) : \beta \in c_\alpha\}$ wählen. (Dies wird durch die Voraussetzung $|c_\alpha| < \min\{\mathfrak{b}(H_a) : a \in A\}$ für alle $\alpha < \lambda$ ermöglicht.)

Wir weisen die gewünschten Eigenschaften nach. Sei dazu $\alpha < \lambda$. Dann ist $f_\alpha <_I h < g_\alpha$, also auch $f_\alpha <_I g_\alpha$. Ebenso gilt für $\beta < \alpha$ nun $g_\beta <_I h < g_\alpha$, d. h. es ist auch $g_\beta <_I g_\alpha$.

Ist ferner $\beta \in c_\alpha$, so gilt $g_\beta < g_\alpha$ nach Konstruktion. □

Eine besondere Bedeutung kommt der Eigenschaft (ii) aus Satz 3.21 zu. Dies wird durch die folgende Definition und das anschließende Lemma verdeutlicht.

Definition 4.13 Eine Bedingung $\bar{c} = (c_\alpha : \alpha < \lambda)$ heißt **kohärent**, falls für alle $\alpha < \lambda$ und $\beta \in c_\alpha$ gilt $c_\beta = c_\alpha \cap \beta$.

Lemma 4.14 *Es sei $\bar{c}$ eine kohärente Bedingung, die von der Folge $\bar{f}$ erfüllt wird. Für alle $\alpha < \lambda$ ist dann $\bar{f} \restriction c_\alpha$ eine $<$-wachsende Teilfolge von $\bar{f}$.*

Beweis: Seien $\alpha < \lambda$ und $\beta, \gamma \in c_\alpha$ mit $\beta < \gamma$. Wir haben $f_\beta < f_\gamma$ zu zeigen.

Aufgrund der Kohärenz von $\bar{c}$ gilt $c_\gamma = c_\alpha \cap \gamma$, also gilt $\beta \in c_\gamma$ und da $\bar{f}$ die Bedingung $\bar{c}$ erfüllt, gilt $f_\beta < f_\gamma$. □

Der Satz 3.21 besagt nun für $|A|^{+++} < \lambda$, daß es eine kohärente Bedingung $\bar{c} = (c_\alpha : \alpha < \lambda)$ mit $|c_\alpha| \leq |A|^+$ für alle $\alpha < \lambda$ gibt, so daß die Mengen c_α für stationär viele $\alpha \in S^\lambda_{|A|^+}$ unbeschränkt in α ist. Für eine die Bedingung $\bar{c}$ erfüllende Folge $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ liefert dies eine bzgl. $<$ wachsende Teilfolge der Länge $|A|^+$. Diese Idee ist ein wesentlicher Bestandteil des folgenden Beweises.

Satz 4.15 *Es sei $\bar{H}$ eine progressive Familie von Halbordnungen. Für alle Kardinalzahlen $\lambda > |A|^{+++}$ besitzt $J_{<\lambda^+}(\bar{H})$ einen Generator.*

Beweis: O. B. d. A. sei $J_{<\lambda^+}(\bar{H}) \supsetneq J_{<\lambda}(\bar{H})$ ein echtes Ideal. Insbesondere ist dann λ regulär und nach Satz 3.21 (mit $\kappa = |A|^+$) können wir eine kohärente Bedingung $\bar{c}$ wählen mit $|c_\alpha| \leq |A|^+$ für alle $\alpha < \lambda$, so daß

$$S := \{\alpha < \lambda : \mathrm{cf}(\alpha) = |A|^+ \wedge \sup c_\alpha = \alpha\}$$

eine in λ stationäre Menge ist.

Ferner sei nach Satz 4.7 eine für $\prod \bar{H}/J_{<\lambda}(\bar{H})$ universelle Folge $\bar{f}$ gewählt. Diese können wir o. B. d. A. so wählen, daß sie die Bedingung $\bar{c}$ erfüllt. (Die

Voraussetzungen von Lemma 4.12 mit $I = J_{<\lambda}(\bar{H})$ sind erfüllt. Wählen wir eine entsprechende Folge $\bar{g}$ wie in diesem Lemma, so ist natürlich auch $\bar{g}$ universell für $\prod \bar{H}/J_{<\lambda}(\bar{H})$.)

Nach Korollar 2.19 (i) ist $\prod \bar{H}/J_{<\lambda^+}(\bar{H})$ eine λ^+-gerichtete Halbordnung, also können wir eine $<_{J_{<\lambda^+}(\bar{H})}$-obere Schranke $g \in \prod \bar{H}$ von $\bar{f}$ wählen. Wir setzen $C_\alpha := C(f_\alpha, g)$ für alle $\alpha < \lambda$. Wie im Beweis von Lemma 4.9 folgt, daß $J_{<\lambda^+}(\bar{H})$ das von $J_{<\lambda}(\bar{H}) \cup \{C_\alpha : \alpha < \lambda\}$ erzeugte Ideal ist.

Ferner gilt natürlich auch $C_\alpha \subseteq_{J_{<\lambda}(\bar{H})} C_\beta$ für alle $\alpha < \beta < \lambda$, d. h. es reicht nun zu zeigen, daß es ein $\alpha^* < \lambda$ gibt, so daß für alle $\beta \in \lambda \setminus \alpha^*$ gilt $C_{\alpha^*} =_{J_{<\lambda}(\bar{H})} C_\beta$.

Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann existiert ein Club E in λ, so daß für alle $\alpha, \beta \in E$ mit $\alpha < \beta$ gilt $C_\alpha \subsetneqq_{J_{<\lambda}(\bar{H})} C_\beta$. Dann ist auch $\operatorname{acc}(E)$ ein Club in λ und es gibt folglich ein $\delta \in S \cap \operatorname{acc}(E)$. Nach Definition von S gilt $\sup c_\delta = \delta$ und $\operatorname{cf}(\delta) = |A|^+$. Ferner existiert zu jedem $\alpha \in c_\delta$ ein $\beta \in c_\delta \setminus \alpha$ mit $C_\alpha \subsetneqq C_\beta$.

(Um dies einzusehen, sei $\alpha \in c_\delta$. Dann existieren wegen $\delta \in \operatorname{acc}(E)$ auch $\xi, \zeta \in E$ mit $\alpha < \xi < \zeta < \delta$. Ferner gibt es nun ein $\beta \in c_\delta$ mit $\zeta < \beta$.

Da $\bar{f}$ die kohärente Bedingung $\bar{c}$ erfüllt, gilt $f_\alpha < f_\beta$ nach Lemma 4.14, d. h. es gilt $C_\alpha \subseteq C_\beta$. Nach Wahl von $\xi, \zeta \in E$ erhalten wir außerdem die Beziehung $C_\alpha \subseteq_{J_{<\lambda}(\bar{H})} C_\xi \subsetneqq_{J_{<\lambda}(\bar{H})} C_\zeta \subseteq_{J_{<\lambda}(\bar{H})} C_\beta$, d. h. es folgt $C_\alpha \subsetneqq_{J_{<\lambda}(\bar{H})} C_\beta$.

Insgesamt gilt also $C_\alpha \subsetneqq C_\beta$, womit die Behauptung gezeigt ist.)

Nun erhält man leicht eine Menge $c \subseteq c_\delta$, die unbeschränkt in δ ist, so daß für alle $\alpha, \beta \in c$ mit $\alpha < \beta$ gilt $C_\alpha \subsetneqq C_\beta$. Dann ist jedoch $|c| \geq \operatorname{cf}(\delta) = |A|^+$, ein Widerspruch dazu, daß $(C_\alpha : \alpha \in c)$ eine $\subsetneqq$-wachsende Folge von Teilmengen von A ist. □

Definition 4.16 Es sei $\bar{H}$ eine progressive Familie von Halbordnungen. Ist für alle $\lambda \in \mathrm{p}\mathfrak{b}(\bar{H})$ die Menge B_λ ein Generator von $J_{<\lambda^+}(\bar{H})$, so nennen wir $(B_\lambda : \lambda \in \mathrm{p}\mathfrak{b}(\bar{H}))$ eine **Generatorenfolge** für $\bar{H}$.

Korollar 4.17 *Ist $\bar{H}$ eine progressive Familie von Halbordnungen, so existiert eine Generatorenfolge für $\bar{H}$.*

Beweis: Ist $\lambda \in \mathrm{p}\mathfrak{b}(\bar{H})$, so existiert ein Ideal I mit $\lambda = \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$. Da $\bar{H}$ progressiv ist, gilt $\lambda > |A|^+$. Die einzigen Fälle, die nicht durch den obigen Satz abgedeckt werden, sind also $\lambda = |A|^{++}$ und $\lambda = |A|^{+++}$. Nach Lemma 2.21 können wir hier

$$\begin{aligned} B_{|A|^{++}} &:= \{a \in A : \mathfrak{b}(H_a) = |A|^{++}\}, \\ B_{|A|^{+++}} &:= \{a \in A : \mathfrak{b}(H_a) = |A|^{+++}\} \end{aligned}$$

setzen. $\square$

Wir beenden dieses Kapitel mit einer Folgerung. In Satz 2.20, hatten wir gezeigt, daß sich die Beschränktheitszahl eines reduzierten Produktes $\prod \bar{H}/I$ „stabilisieren“ läßt, indem man zum Ideal I eine einzelne Menge hinzufügt. (Es ist $I \restriction B = I[A \setminus B]$.) Die Existenz von Generatoren liefert ein entgegengesetztes Ergebnis: Ist I ein Ideal mit $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) = \lambda$, das nicht stabil für $\bar{H}$ ist – diese Bedingung ist offensichtlich notwendig –, so läßt sich die Beschränktheitszahl durch Hinzufügen einer Menge auch erhöhen.

Lemma 4.18 *Es sei $\bar{H}$ progressiv und I ein Ideal, das nicht stabil für $\bar{H}$ ist. Dann existiert $B \in I^+$, so daß $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I[B]) > \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$ gilt.*

Beweis: Es sei $\lambda := \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$. Nach Korollar 2.19 gilt $J_{<\lambda}(\bar{H}) \subseteq I$. Da I nicht stabil ist, existiert ein echtes Ideal $J \supseteq I$ mit $\mu := \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) > \lambda$. Wieder nach Korollar 2.19 folgt $J_{<\lambda^+}(\bar{H}) \subseteq J_{<\mu}(\bar{H}) \subseteq J$.

Wir wählen nun einen Generator B von $J_{<\lambda^+}(\bar{H})$ und betrachten das Ideal $I[B]$. Wegen $B \in J_{<\lambda^+}(\bar{H}) \subseteq J$ und $I \subseteq J$ gilt auch $I[B] \subseteq J$, d. h. $I[B]$ ist ein echtes Ideal. Ferner gilt wegen $J_{<\lambda^+}(\bar{H}) = J_{<\lambda}(\bar{H})[B] \subseteq I[B]$ auch $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I[B]) \geq \lambda^+$, was zu zeigen war. $\square$

Kapitel 5

Wahre Kofinalitäten

Zum Abschluß wollen wir auf das Verhältnis der vorliegenden Arbeit zur üblichen pcf-Theorie eingehen. Wir zeigen, daß die von uns definierten Begriffe bei der Betrachtung von reduzierten Produkten regulärer Kardinalzahlen mit den entsprechenden Begriffen der pcf-Theorie übereinstimmen, so daß mit dieser Arbeit insbesondere eine alternative Entwicklung der Grundlagen der pcf-Theorie vorliegt.

Ferner verallgemeinern wir die Resultate über wahre Kofinalitäten von reduzierten Produkten und gehen auf den Zusammenhang zu der von S. Shelah definierten Operation $\mathrm{pp}(\lambda)$ ein.

5.1 pcf-Theorie

In diesem Abschnitt betrachten wir Produkte von Familien $(\lambda_a : a \in A)$ von regulären Kardinalzahlen als Spezialfall der bisher betrachteten Produkte. Eine Familie dieser Form bezeichnen wir häufig entsprechend mit $\bar{\lambda}$. Eine solche Familie $\bar{\lambda}$ ist progressiv, falls $|A|^+ < \lambda_a$ für alle $a \in A$ gilt.

Wir beginnen mit der grundlegenden Definition der pcf-Theorie und zeigen dann die angekündigten Ergebnisse.

Definition 5.1 Sei $\bar{\lambda}$ eine Familie regulärer Kardinalzahlen. Wir definieren die Menge der möglichen Kofinalitäten von $\bar{\lambda}$ durch

$$\mathrm{pcf}(\bar{\lambda}) := \{\mathrm{tcf}(\prod \bar{\lambda}/I) : I \in \mathrm{Id}(A), \prod \bar{\lambda}/I \text{ besitzt eine wahre Kofinalität}\}.$$

Der Beweis des folgenden grundlegenden Resultats basiert auf Hilfsmitteln, die in den vorherigen Kapiteln entwickelt wurden, nämlich dem Lemma 2.15 und dem Korollar 4.8

Satz 5.2 *Es sei $\bar{\lambda}$ eine progressive Familie von regulären Kardinalzahlen und I ein stabiles Ideal für $\bar{\lambda}$. Dann besitzt $\prod \bar{\lambda}/I$ eine wahre Kofinalität und es gilt*

$$\operatorname{tcf}(\prod \bar{\lambda}/I) = \mathfrak{b}(\prod \bar{\lambda}/I).$$

Beweis: Es sei $\lambda := \mathfrak{b}(\prod \bar{\lambda}/I)$. Nach Korollar 4.8 können wir eine $<_I$-wachsende Folge $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ wählen, die für alle echten Ideale $J \supsetneq I$ bzgl. $<_J$ unbeschränkt ist. Ferner existiert dazu nach Lemma 2.15 eine Funktion $g \in \prod \bar{\lambda}$, so daß für alle $h \in \prod \bar{\lambda}$ mit $g < h$ die Menge

$$\{\alpha < \lambda : C(f_\alpha, g) = C(f_\alpha, h)\}$$

unbeschränkt in λ ist. Da die Folge $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ unbeschränkt bzgl. $<_I$ ist, existiert ein $\alpha^* < \lambda$ mit $f_{\alpha^*} \not<_I g$. Damit ist für alle $\alpha \in \lambda \setminus \alpha^*$ auch $f_\alpha \not<_I g$, also $C(f_\alpha, g) \notin I$.

Wir zeigen, daß für alle $\alpha \in \lambda \setminus \alpha^*$ gilt $\operatorname{tcf}(\prod \bar{\lambda}/I \restriction C(f_\alpha, g)) = \lambda$. Dazu reicht es zu zeigen, daß die Folge $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ kofinal in $\prod \bar{\lambda}/I \restriction C(f_\alpha, g)$ ist. Sei also $h \in \prod \bar{\lambda}$, o. B. d. A. sei $g < h$. Nach Wahl von g existiert dann ein $\beta \in \lambda \setminus \alpha$ mit $C(f_\beta, g) = C(f_\beta, h)$. Wegen $C(f_\alpha, g) \subseteq_I C(f_\beta, g) = C(f_\beta, h)$ gilt $C(f_\alpha, g) \setminus C(f_\beta, h) = C(f_\alpha, g) \cap B(f_\beta, h) \in I$. Nach Definition von $I \restriction C(f_\alpha, g)$ gilt $C[h, f_\beta] = B(f_\beta, h) \in I \restriction C(f_\alpha, g)$, also $h \leq_{I \restriction C(f_\alpha, g)} f_\beta <_{I \restriction C(f_\alpha, g)} f_{\beta+1}$.

Wir betrachten nun

$$J := I \cup \{B \in I^+ : \operatorname{tcf}(\prod \bar{\lambda}/I \restriction B) = \lambda\}.$$

Es ist leicht zu zeigen, daß J ein Ideal ist. Können wir $A \in J$ zeigen, so sind wir fertig. Sonst wäre $J \supsetneq I$ ein echtes Ideal, nach Wahl der Folge $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ wäre diese auch bzgl. $<_J$ unbeschränkt. Wir haben jedoch gerade $C(f_\alpha, g) \in J$ für alle $\alpha \in \lambda \setminus \alpha^*$ gezeigt, also gilt $f_\alpha <_J g$ für alle $\alpha < \lambda$, ein Widerspruch. □

Wir erhalten das folgende Korollar, das zeigt, daß die von uns definierten Begriffe mit denen der pcf-Theorie übereinstimmen. So ist Teil (ii) eine aus der pcf-Theorie bekannte Darstellung des Ideals $J_{<\lambda}(\bar{\lambda})$, vgl. etwa [10]

Korollar 5.3 *Ist $\bar{\lambda}$ eine progressive Familie von regulären Kardinalzahlen, so gilt*

(i) $\mathrm{pcf}(\bar{\lambda}) = \mathrm{p}\mathfrak{b}(\bar{\lambda})$,

(ii) $J_{<\lambda}(\bar{\lambda}) = \{B \subseteq A : \mathrm{pcf}(\bar{\lambda} \restriction B) \subseteq \lambda\}$.

Beweis: (i) „$\subseteq$“ ist klar, denn ist $\lambda \in \mathrm{pcf}(\bar{\lambda})$, so existiert ein Ideal I auf A mit $\lambda = \mathrm{tcf}(\prod \bar{\lambda}/I) = \mathfrak{b}(\prod \bar{\lambda}/I) \in \mathrm{p}\mathfrak{b}(\bar{\lambda})$.

„$\supseteq$“ Es sei $\lambda \in \mathrm{p}\mathfrak{b}(\bar{\lambda})$, also $\lambda = \mathfrak{b}(\prod \bar{\lambda}/I)$ für ein Ideal I auf A. Nach Satz 2.16 existiert eine Menge $B \in I^+$ mit $\lambda = \mathfrak{b}(\prod \bar{\lambda}/I \restriction B)$, so daß $I \restriction B$ ein stabiles Ideal ist. Nach Satz 5.2 folgt $\lambda = \mathrm{tcf}(\prod \bar{\lambda}/I \restriction B) \in \mathrm{pcf}(\bar{\lambda})$.

(ii) „$\subseteq$“ Sei $B \in J_{<\lambda}(\bar{\lambda})$. Ist $\mu \in \mathrm{pcf}(\bar{\lambda} \restriction B)$, so existiert ein Ideal J auf B mit $\mu = \mathrm{tcf}(\prod \bar{\lambda} \restriction B/J)$. Setzt man $I := J[A \setminus B]$, so erhält man auch $\mu = \mathfrak{b}(\prod \bar{\lambda}/I)$. Aus der Darstellung in Korollar 2.19 folgt daher $\mu < \lambda$, was zu zeigen war.

„$\supseteq$“ Sei $B \subseteq A$ mit $\mathrm{pcf}(\bar{\lambda} \restriction B) \subseteq \lambda$. Wir verwenden wieder die Darstellung in Korollar 2.19. Ist I ein Ideal auf A mit $A \setminus B \in I$, so können wir nach Satz 2.16 ein Ideal $J \supseteq I$ wählen, das stabil für $\bar{\lambda}$ ist. Damit erhalten wir $\mathrm{g}\mathfrak{b}(\prod \bar{\lambda}/I) \leq \mathfrak{b}(\prod \bar{\lambda}/J) = \mathrm{tcf}(\prod \bar{\lambda}/J) = \mathrm{tcf}(\prod \bar{\lambda} \restriction B/J \cap \mathcal{P}(B)) < \lambda$. □

5.2 Halbordnungen mit wahren Kofinalitäten

Wir behandeln nun solche Produkte $\prod \bar{H}/I$, bei denen für alle $a \in A$ die Faktoren H_a eine wahre Kofinalität besitzen. Es ist bekannt, daß sich die Untersuchung der wahren Kofinalitäten solcher Produkte reduzieren läßt auf die Untersuchung von Produkten regulärer Kardinalzahlen. Dasselbe gilt auch für die Beschränktheitszahlen dieser Produkte und wir erhalten damit eine Verallgemeinerung von Satz 5.2.

Lemma 5.4 *Es sei $\bar{H}$ eine Familie von Halbordnungen. Für alle $a \in A$ besitze H_a eine unendliche wahre Kofinalität* $\mathrm{tcf}(H_a)$. *Ist I ein Ideal auf A, so gilt*

$$\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) = \mathfrak{b}(\prod_{a\in A} \mathrm{tcf}(H_a)/I).$$

Ferner besitzt die Halbordnung $\prod \bar{H}/I$ genau dann eine wahre Kofinalität, wenn $\prod_{a\in A} \operatorname{tcf}(H_a)/I$ eine wahre Kofinalität besitzt und in diesem Fall gilt

$$\operatorname{tcf}(\prod \bar{H}/I) = \operatorname{tcf}(\prod_{a\in A} \operatorname{tcf}(H_a)/I).$$

Beweis: Nach Voraussetzung können wir für jedes $a \in A$ eine $<_a$-wachsende Folge $(x^a_\alpha : \alpha < \operatorname{tcf}(H_a))$ von Elementen von H_a wählen, die kofinal in H_a ist. Dadurch lassen sich die beiden Abbildungen $\varphi : \prod \bar{H} \to \prod_{a\in A} \operatorname{tcf}(H_a)$ und $\psi : \prod_{a\in A} \operatorname{tcf}(H_a) \to \prod \bar{H}$ folgendermaßen in kanonischer Weise definieren. Ist $f \in \prod \bar{H}$, so setze für $a \in A$

$$\varphi(f)(a) := \min\{\alpha < \operatorname{tcf}(H_a) : f(a) \leq_a x^a_\alpha\},$$

für $g \in \prod_{a\in A} \operatorname{tcf}(H_a)$ setzen wir für alle $a \in A$

$$\psi(g)(a) := x^a_{g(a)}.$$

Für $f, f' \in \prod \bar{H}$ und $g, g' \in \prod_{a\in A} \operatorname{tcf}(H_a)$ zeigt man nun leicht die folgenden Eigenschaften:

(i) $f(a) \leq \psi(\varphi(f))(a)$ für alle $a \in A$,

(ii) $g(a) = \varphi(\psi(g))(a)$ für alle $a \in A$,

(iii) $f \leq_I f' \;\Rightarrow\; \varphi(f) \leq_I \varphi(f')$,

(iv) $g <_I g' \;\Rightarrow\; \psi(g) <_I \psi(g')$.

Mit Hilfe dieser Eigenschaften zeigen wir nun die erste Aussage des Lemmas.

„$\geq$“ Es sei $F \subseteq \prod \bar{H}$ unbeschränkt in $\prod \bar{H}/I$. Wir zeigen, daß dann auch $\{\varphi(f) : f \in F\}$ unbeschränkt in $\prod_{a\in A} \operatorname{tcf}(H_a)/I$ ist. Angenommen, es gibt eine obere Schranke $g \in \prod_{a\in A} \operatorname{tcf}(H_a)$ von $\{\varphi(f) : f \in F\}$. Für alle $f \in F$ gilt folglich $\varphi(f) <_I g$, also auch $f \leq \psi(\varphi(f)) <_I \psi(g)$, d. h. $\psi(g)$ ist eine obere Schranke von F, ein Widerspruch.

„$\leq$“ Es sei $G \subseteq \prod_{a\in A} \operatorname{tcf}(H_a)$ unbeschränkt in $\prod_{a\in A} \operatorname{tcf}(H_a)/I$. Wir zeigen, daß auch die Menge $\{\psi(g+1) : g \in G\}$ unbeschränkt in $\prod \bar{H}/I$ ist, wobei die Funktion $g+1$ definiert ist durch $(g+1)(a) := g(a)+1$ für alle $a \in A$.

Angenommen, $f \in \prod \bar{H}$ ist eine $<_I$-obere Schranke von $\{\psi(g+1) : g \in G\}$. Für alle $g \in G$ gilt dann $\psi(g+1) <_I f$, also $g < g+1 = \varphi(\psi(g+1)) \leq_I \varphi(f)$. Daher ist $\varphi(f)$ eine obere Schranke von G, Widerspruch.

Die zweite Aussage beweisen wir völlig analog. Sei dazu $(g_\alpha : \alpha < \lambda)$ eine $<_I$-wachsende Folge von Elementen von $\prod_{a\in A} \operatorname{tcf}(H_a)$, die kofinal in $\prod_{a\in A} \operatorname{tcf}(H_a)/I$ ist. Die Folge $(\psi(g_\alpha) : \alpha < \lambda)$ ist dann nach (iv) ebenfalls $<_I$-wachsend. Ferner ist sie kofinal in $\prod \bar{H}/I$: Ist $f \in \prod \bar{H}$, so ist $\varphi(f) \in \prod_{a\in A} \operatorname{tcf}(H_a)$, also existiert ein $\alpha < \lambda$ mit $\varphi(f) <_I g_\alpha$. Nach (i) und (iv) folgt $f \leq \psi(\varphi(f)) <_I \psi(g_\alpha)$.

Umgekehrt sei noch $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ eine $<_I$-wachsende Folge, die kofinal in $\prod \bar{H}/I$ ist. Wir zeigen zunächst, daß auch $(\varphi(f_\alpha) : \alpha < \lambda)$ kofinal in $\prod_{a\in A} \operatorname{tcf}(H_a)$ ist. Sei dazu $g \in \prod_{a\in A} \operatorname{tcf}(H_a)$. Dann existiert ein $\alpha < \lambda$ mit $\psi(g+1) <_I f_\alpha$, also folgt $g < g+1 = \varphi(\psi(g+1)) \leq_I \varphi(f_\alpha)$, d. h. es gilt $g <_I \varphi(f_\alpha)$.

Die Folge $(\varphi(f_\alpha) : \alpha < \lambda)$ ist zwar zunächst nur $\leq_I$-wachsend, wir haben jedoch eben insbesondere gezeigt, daß es zu jedem $\alpha < \lambda$ ein $\beta < \lambda$ gibt, so daß $\varphi(f_\alpha) <_I \varphi(f_\beta)$ gilt. Also können wir die Folge zu einer $<_I$-wachsenden Folge der Länge λ ausdünnen, die auch kofinal in $\prod_{a\in A} \operatorname{tcf}(H_a)/I$ ist. □

Wie bereits angekündigt können wir nun Satz 5.2 verallgemeinern.

Korollar 5.5 *Es sei $\bar{H}$ eine progressive Familie von Halbordnungen, die alle eine wahre Kofinalität besitzen. Dann sind äquivalent:*

(i) I ist stabil für $\bar{H}$.

(ii) $\prod \bar{H}/I$ besitzt eine wahre Kofinalität.

Beweis: „(i) $\Rightarrow$ (ii)“ Wir führen die Aussage mit Hilfe von Lemma 5.4 auf den Satz 5.2 zurück. Da I stabil für $\bar{H}$ ist, ist I auch ein stabiles Ideal für die Familie $(\operatorname{tcf}(H_a) : a \in A)$. Denn ist $J \supseteq I$ ein echtes Ideal, so gilt nach Lemma 5.4

$$\mathfrak{b}(\textstyle\prod_{a\in A} \operatorname{tcf}(H_a)/J) = \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) = \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) = \mathfrak{b}(\prod_{a\in A} \operatorname{tcf}(H_a)/I).$$

Ferner ist $(\operatorname{tcf}(H_a) : a \in A)$ eine progressive Familie von regulären Kardinalzahlen, nach Satz 5.2 besitzt also $\prod_{a\in A} \operatorname{tcf}(H_a)/I$ eine wahre Kofinalität.

Abermals nach Lemma 5.4 besitzt dann auch $\prod \bar{H}/I$ eine wahre Kofinalität.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)“ Ist $\lambda = \operatorname{tcf}(\prod \bar{H}/I)$, so gilt für jedes Ideal $J \supseteq I$ ebenfalls $\lambda = \operatorname{tcf}(\prod \bar{H}/J)$, denn jede Folge, die bzgl. $<_I$ kofinal in $\prod \bar{H}$ ist, ist auch bzgl. $<_J$ kofinal in $\prod \bar{H}$. Für jedes echte Ideal $J \supseteq I$ gilt damit insbesondere auch $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) = \mathrm{tcf}(\prod \bar{H}/J) = \mathrm{tcf}(\prod \bar{H}/I) = \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I)$. □

Offensichtlich läßt sich ein allgemeineres Resultat nicht erwarten, wie das folgende degenerierte Beispiel zeigt. Ist H eine Halbordnung, die keine wahre Kofinalität besitzt, so können wir das Produkt betrachten, das H als einzigen Faktor besitzt, also etwa $A = \{0\}$, $H_0 = H$. Dann ist jedes echte Ideal auf A – es gibt nur ein einziges, nämlich $I = \{\emptyset\}$ – stabil für $\bar{H}$, aber $\prod \bar{H}/I$ ist isomorph zu H, besitzt also keine wahre Kofinalität.

Es ist es naheliegend, auf die Existenz der wahren Kofinalitäten aller Halbordnungen H_a für $a \in A$ zu verzichten und stattdessen das Produkt der Beschränktheitszahlen, also $\prod_{a\in A} \mathfrak{b}(H_a)$ zu betrachten. Im folgenden gelingt es uns jedoch nur, eine Ungleichung der Lemma 5.4 entsprechenden Aussage zu beweisen.

Lemma 5.6 *Sei $\bar{H}$ eine Familie von Halbordnungen mit unendlicher Beschränktheitszahl. Dann gilt*

$$\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) \leq \mathfrak{b}(\prod_{a\in A} \mathfrak{b}(H_a)/I).$$

Beweis: Für $a \in A$ sei $(x^a_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}(H_a))$ eine $<_a$-wachsende und unbeschränkte Folge in H_a, die nach Lemma 1.9 existiert. Ferner sei $F \subseteq \prod_{a\in A} \mathfrak{b}(H_a)$ bzgl. $<_I$ unbeschränkt. Zu jedem $f \in F$ definieren wir nun eine Funktion $h(f) \in \prod \bar{H}$ wie folgt. Ist $a \in A$, so sei $h(f)(a) := x^a_{f(a)}$. Wir wollen zeigen, daß die Menge $\{h(f) : f \in F\}$ unbeschränkt in $\prod \bar{H}/I$ ist. Damit folgt die Behauptung.

Angenommen, $g \in \prod \bar{H}$ ist bzgl. $<_I$ eine obere Schranke. Nach Wahl der Folgen $(x^a_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}(H_a))$ existiert zu jedem $a \in A$ ein $\alpha < \mathfrak{b}(H_a)$ mit $x^a_\alpha \not<_a g(a)$. Setze für $a \in A$

$$g'(a) := \min\{\alpha < \mathfrak{b}(H_a) : x^a_\alpha \not<_a g(a)\}.$$

Es ist $g' \in \prod_{a\in A} \mathfrak{b}(H_a)$, also existiert nach Wahl von F ein $f \in F$ mit $f \not<_I g'$. Wir zeigen $C(f, g') \subseteq C(h(f), g)$ und erhalten damit auch $h(f) \not<_I g$ im Widerspruch zur Annahme, daß g eine obere Schranke von $\{h(f) : f \in F\}$ bzgl. $<_I$ ist.

Sei dazu nun $a \in C(f, g')$, d. h. $f(a) \not< g'(a)$. Dann gilt $g'(a) \leq f(a)$, also $x^a_{g'(a)} \leq_a x^a_{f(a)}$. Nach Definition von g' gilt $x^a_{g'(a)} \not<_a g(a)$ und damit auch sicher $h(f)(a) = x^a_{f(a)} \not<_a g(a)$, was zu zeigen war. $\square$

Immerhin läßt sich mit diesem Resultat eine Darstellung für die im folgenden Abschnitt definierten Operation pp(λ) herleiten. Ferner können wir mit Hilfe eines Widerspruchsfreiheitsresultates über pp(λ) begründen, warum sich die Gleichheit der beiden im obigen Lemma betrachteten Beschränktheitszahlen nicht beweisen läßt.

5.3 pp(λ)

In [9] definiert S. Shelah die Kardinalzahlfunktion $\mathrm{pp}_\kappa(\lambda)$ für singuläre Kardinalzahlen λ und $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \kappa < \lambda$ als einen „Ersatz“ für die Funktion λ^κ. Diese Definition lautet in ihrer einfachsten Form folgendermaßen.

Definition 5.7 Es sei λ eine singuläre Kardinalzahl und $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \kappa < \lambda$. Dann setzen wir

$$\mathrm{pp}_\kappa(\lambda) := \sup\{\mathrm{tcf}(\prod \bar{\lambda}/I) : \bar{\lambda} \in {}^\kappa(\lambda \cap \mathrm{Reg}), I \in \mathrm{Id}(\kappa), \lim_I \bar{\lambda} = \lambda\}.$$

Ferner sei $\mathrm{pp}(\lambda) := \mathrm{pp}_{\mathrm{cf}(\lambda)}(\lambda)$.

Das folgende tiefliegende Resultat von S. Shelah verdeutlicht die Bedeutung von reduzierten Produkten für die Kardinalzahlarithmetik.

Satz 5.8 *Ist $\lambda < \aleph_\lambda$ singulär und gilt $\kappa^{\mathrm{cf}(\lambda)} < \lambda$ für alle $\kappa < \lambda$, so ist*

$$\mathrm{pp}(\lambda) = \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)}.$$

Im Lichte dieses Satzes besitzt z. B. Shelahs berühmtes Resultat die folgenden Darstellungen.

- $\mathrm{pp}(\aleph_\omega) < \aleph_{\omega_4}$.
- $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega \;\Rightarrow\; \aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_4}$.
- $\aleph_\omega$ starke Limeskardinalzahl $\;\Rightarrow\; 2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}$.

Ein offensichtlicher Vorteil der ersten Darstellung liegt darin, daß keine Voraussetzungen über die – auf der Basis von ZFC fast beliebigen – Werte von $2^{\aleph_n}$ für $n < \omega$ benötigt werden. Daher spricht sich S. Shelah für die Untersuchung der Operation pp(λ) aus und schlägt in [8] u. a. die Hypothese

$$\forall\lambda \in \mathrm{Sing}\ \ \mathrm{pp}(\lambda) = \lambda^+$$

als Alternative zur singulären Kardinalzahlhypothese vor.

Wir wollen nun mit Hilfe von Lemma 5.6 eine andere Darstellung für $\mathrm{pp}_\kappa(\lambda)$ beweisen.

Lemma 5.9 *Sei λ eine singuläre Kardinalzahl und* $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \kappa < \lambda$*. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\mathrm{pp}_\kappa(\lambda) = \sup\{\mathfrak{b}(\textstyle\prod \bar{H}/I) : \bar{H} = (H_i : i < \kappa), I \in \mathrm{Id}(\kappa),\\ \liminf{}_I(\mathfrak{b}(H_i) : i < \kappa) = \lambda\}.\end{aligned}$$

Beweis: Die Richtung „$\leq$“ ist nach Definition von $\mathrm{pp}_\kappa(\lambda)$ klar, denn jedes Produkt von regulären Kardinalzahlen ist natürlich auch ein Produkt von Halbordnungen. Um die Ungleichung „$\geq$“ zu zeigen, seien $\bar{H}$ und I wie in der im Lemma angegebenen Menge gegeben. Da $\kappa^+ < \lambda = \liminf_I(\mathfrak{b}(H_i) : i < \kappa)$ gilt, ist $\{i < \kappa : \mathfrak{b}(H_i) \leq \kappa^+\} \in I$, also können wir $\bar{H}$ o. B. d. A. als progressiv annehmen.

Es ist $X := \{i < \kappa : \mathfrak{b}(H_i) \leq \lambda\} \notin I$. Da $\mathfrak{b}(H_i)$ stets regulär ist und λ nach Voraussetzung singulär ist, gilt $X = \{i < \kappa : \mathfrak{b}(H_i) < \lambda\}$.

Zunächst gilt $\lim_{I\restriction X}(\mathfrak{b}(H_i) : i < \kappa) = \lambda$, denn nach Lemma 1.28 ist einerseits $\liminf_{I\restriction X}(\mathfrak{b}(H_i) : i < \kappa) \geq \liminf_I(\mathfrak{b}(H_i) : i < \kappa) = \lambda$, andererseits gilt $\{i < \kappa : \mathfrak{b}(H_i) > \lambda\} = A \setminus X \in I\restriction X$, also ist $\limsup_{I\restriction X}(\mathfrak{b}(H_i) : i < \kappa) \leq \lambda$.

Wir können nun ein Ideal $J \supseteq I\restriction X$ wählen, so daß $\prod_{i<\kappa} \mathfrak{b}(H_i)/J$ eine wahre Kofinalität besitzt. Da auch $\lim_J(\mathfrak{b}(H_i) : i < \kappa) = \lambda$ gilt, erhalten wir nach Definition von $\mathrm{pp}_\kappa(\lambda)$ die Ungleichung

$$\mathrm{tcf}(\textstyle\prod_{i<\kappa} \mathfrak{b}(H_i)/J) \leq \mathrm{pp}_\kappa(\lambda),$$

wenn wir o. B. d. A. $\mathfrak{b}(H_i) < \lambda$ für alle $i < \kappa$ annehmen. Schließlich gilt $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) \leq \mathfrak{b}(\prod \bar{H}/J) \leq \mathfrak{b}(\prod_{i<\kappa} \mathfrak{b}(H_i)/J) = \mathrm{tcf}(\prod_{i<\kappa} \mathfrak{b}(H_i)/J)$ mit Hilfe von Lemma 5.6. $\square$

Möglicherweise ist es mit dieser Darstellung einfacher, Resultate wie den oben zitierten Shelahschen Satz zu erhalten oder unter bestimmten Annahmen etwa $\mathrm{pp}(\lambda) > \lambda^+$ zu beweisen.

Ein solches Resultat verwenden wir zum Schluß noch, um zu erklären, warum in Lemma 5.6 nicht die Gleichheit gezeigt werden konnte. In [7] hat M. Magidor unter der Annahme der Existenz gewisser großer Kardinalzahlen ein Modell von ZFC konstruiert, in dem $\aleph_\omega$ eine starke Limeskardinalzahl ist und $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+2}$ gilt.

Nach Satz 5.8 gilt in diesem Modell $\mathrm{pp}(\aleph_\omega) = \aleph_\omega^{\aleph_0} = 2^{\aleph_\omega} > \aleph_{\omega+1}$; nach dem nun folgenden Lemma existiert in diesem Modell also auch ein Gegenbeispiel für die Gleichheit in Lemma 5.6. Ob sich ein solches Gegenbeispiel auch auf der Grundlage von ZFC finden läßt, muß als offene Frage stehen bleiben.

Lemma 5.10 *Es sei λ singulär und $\mathrm{pp}(\lambda) > \lambda^+$. Dann existiert eine Familie $\bar{H} = (H_i : i < \mathrm{cf}(\lambda))$ von Halbordnungen mit*

$$\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) < \mathfrak{b}(\prod_{i<\mathrm{cf}(\lambda)} \mathfrak{b}(H_i)/I).$$

Beweis: Nach Definition von $\mathrm{pp}(\lambda)$ existiert eine Folge $\bar{\lambda} = (\lambda_i : i < \mathrm{cf}(\lambda))$ von regulären Kardinalzahlen kleiner als λ sowie ein Ideal I auf $\mathrm{cf}(\lambda)$ mit $\mu := \mathrm{tcf}(\prod \bar{\lambda}/I) > \lambda^+$.

Wir betrachten nun die Halbordnungen $H_i := \lambda_i \times \lambda^+$ mit der üblichen Produktordnung. Es ist $\mathfrak{b}(H_i) = \min\{\lambda_i, \lambda^+\} = \lambda_i$ für alle $i < \mathrm{cf}(\lambda)$, d. h. es gilt auch $\mathfrak{b}(\prod_{i<\mathrm{cf}(\lambda)} \mathfrak{b}(H_i)/I) = \mu > \lambda^+$.

Um nun andererseits $\mathfrak{b}(\prod_{i<\mathrm{cf}(\lambda)} H_i/I) \leq \lambda^+$ zu zeigen, geben wir eine unbeschränkte Teilmenge von $\prod_{i<\mathrm{cf}(\lambda)} H_i/I$ an, die die Mächtigkeit λ^+ besitzt.

Sei für $\alpha < \lambda^+$ die Funktion f_α definiert durch $f_\alpha(i) = (0, \alpha)$ für alle $i < \mathrm{cf}(\lambda)$. Ist nun $g \in \prod_{i<\mathrm{cf}(\lambda)} H_i$, so ist g keine obere Schranke: Sei etwa $g(i) = (\alpha_i, \beta_i)$ für $i < \mathrm{cf}(\lambda)$. Mit $\beta := \sup\{\beta_i : i < \mathrm{cf}(\lambda)\} < \lambda^+$ folgt $(0, \beta) \not< (\alpha_i, \beta_i)$ für alle $i < \mathrm{cf}(\lambda)$, also $f_\beta \not<_I g$. Also ist $\{f_\alpha : \alpha < \lambda^+\}$ unbeschränkt bzgl. $<_I$ und es folgt $\mathfrak{b}(\prod \bar{H}/I) \leq \lambda^+$. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] BURKE, M. R. und M. MAGIDOR: *Shelah's* pcf *theory and its applications*. Ann. Pure Appl. Logic, 50(3):207–254, 1990.

[2] HOLZ, M., K. STEFFENS und E. WEITZ: *Introduction to cardinal arithmetic*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[3] JECH, T.: *A variation on a theorem of Galvin and Hajnal*. Bull. London Math. Soc., 25(2):97–103, 1993.

[4] JECH, T.: *Set theory*. Springer-Verlag, Berlin, 2. Aufl., 1997.

[5] KOJMAN, M.: *The A,B,C of* pcf*: A companion to* pcf *theory, part I*. `http://www.cs.bgu.ac.il/~kojman/`, `http://xxx.lanl.gov/`, 1995.

[6] KUNEN, K.: *Set theory*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983. An introduction to independence proofs, Reprint of the 1980 original.

[7] MAGIDOR, M.: *On the singular cardinals problem. I*. Israel J. Math., 28(1-2):1–31, 1977.

[8] SHELAH, S.: *Advances in cardinal arithmetic*. In: *Finite and infinite combinatorics in sets and logic (Banff, AB, 1991)*, S. 355–383. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.

[9] SHELAH, S.: *Cardinal arithmetic*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1994. Oxford Science Publications.

[10] SHELAH, S.: *The pcf theorem revisited*. In: *The mathematics of Paul Erdős, II*, S. 420–459. Springer, Berlin, 1997.

[11] WEITZ, E.: *Untersuchungen über die Grundlagen der* pcf*-Theorie von Saharon Shelah*. Dissertation, 1996.

Index